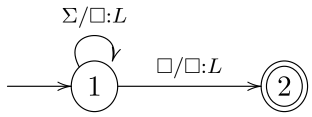
MCAL/MT - série 1 - Machine de Turing (2 TD)

Exercice 1 : Machine de Turing de base et macro-transitions

On considére l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. On rappelle que $\Box$ ne fait pas partie de l'alphabet.

Q1. Que fait la MT 

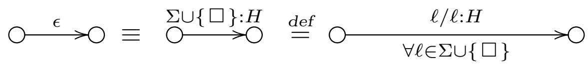
? Quel langage reconnaît-elle ?

SOLUTION

M_1 efface le ruban vers la gauche à partir de la position courante et jusqu'à rencontrer un $\Box$. La MT *M_1 termine sur un état accepteur quel que soit le ruban d'entrée donc elle accepte tous les mots : $\mathscr{L}(M_1) = \Sigma^*$.*

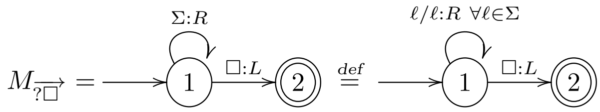
Q2. On considére un alphabet $\Sigma = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Expliquez comment réaliser les transitions suivantes à l'aide de transitions classiques : (1) $q \xrightarrow{\{s_1,s_2\}/s_3} q'$ (2) $q \xrightarrow[\ell\in\Sigma-s_1]{\ell/\Box:d} q'$ (3) $q \xrightarrow{\Sigma:d} q'$ (4) Même question pour la transition SKIP ou NOP entre deux états qui ne fait « rien » que, par la suite, on la notera $\bigcirc \xrightarrow{\epsilon} \bigcirc$.

SOLUTION



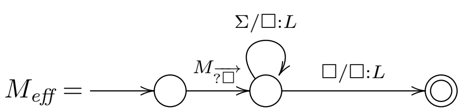
Q3. Dessinez une machine $M_{\overrightarrow{?\Box}}$ qui déplace la tête de lecture jusqu'au dernier symbole à droite différent de $\Box$.

SOLUTION



Q4. Dessinez une machine M_{eff} qui efface le ruban et termine, à condition de démarrer sur une partie non vierge du ruban. Pour cela elle remplace tous les symboles par $\Box$, tout en respectant la contrainte qui interdit à tout moment d'avoir un ruban de la forme $\boxed{{}^\infty\Box \mid \omega_1 \mid \Box \mid \omega_2 \mid \Box^\infty}$. Comment se comporte votre machine si on l'appelle sur le ruban vierge ?

SOLUTION

1. 

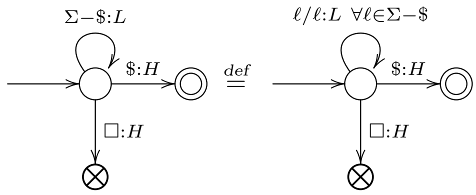
2. *Elle ne modifie pas le ruban et s'arrête. Elle s'est déplacée d'une case vers la gauche mais sur un ruban infini de $\Box$ ça ne se remarque pas.*

Q5. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. Donnez un MT M_{find} qui, quel que soit l'endroit où on la place sur un ruban *non-vierge*, trouve le mot $\omega \in \{0,1\}^*$ inscrit sur le ruban et se place au début du mot. Vous aurez besion du symbole \$ pour repérer les endroits déjà explorés mais vous devrez remettre le ruban dans l'état de départ.

Q6. Dessinez une machine $M_{\overleftarrow{\$}}$ qui déplace la tête de lecture vers la gauche jusqu'à rencontrer le marqueur \$ ou un blanc $\Box$. Elle termine dans l'état accepteur $\circledcirc$ si elle trouve le \$ et dans l'état exception $\otimes$ sinon.

SOLUTION

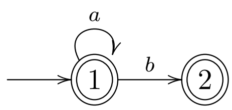
$M_{\overleftarrow{\$}} =$



Q7. Pour la MT de la question **Q3** donnez sa description sous la forme d'un sextuplet $(\Sigma, \mathscr{Q}, q_I, \delta, \mathscr{Acc}, \mathscr{Exc})$ où Σ est l'alphabet de M, $\mathscr{Q}$ est l'ensemble des états de M, q_i son état initial, sa fonction de transition $\delta : \mathscr{Q} \times \Sigma \cup \{\Box\} \to \Sigma \cup \{\Box\} \times \{L, H, R\} \times \mathscr{Q}$, $\mathscr{Acc} \subseteq \mathscr{Q}$ est l'ensemble des états accepteurs, $\mathscr{Exc} \subseteq \mathscr{Q}$ est l'ensemble des états d'exception.

Q8. (DS 2014) On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Comment traduire les transitions d'un automate (à nombre) d'états fini A en transition de machines de Turing pour obtenir une MT M équivalente à A au sens où $\mathscr{L}(A) = \mathscr{L}(M)$? Appliquez votre traduction à l'AEF

$A =$



Arithmétique en binaire On considére l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. On note $[n]_2$ l'écriture binaire *little endian* (*ie.* avec les unités à gauche) de l'entier $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, $[4]_2 = 001$, $[5]_2 = 101$.

Q9. Donnez une MT M_{inc} qui incrémente de 1 un entier n écrit sur le ruban en binaire. Vous utiliserez un état q_r pour mémoriser la retenue r à propager. On autorise uniquement des transitions de la forme $q \xrightarrow{l/e:d} q'$ qui effectue à la fois une lecture, une écriture, un déplacement.

Q10. Donnez une MT $M_{0?}$ qui teste si le ruban contient l'entier 0. On adopte la convention que l'entier 0 est représenté par un unique 0. La MT $M_{0?}$ accepte le mot 0 et rejette tout autre mot.

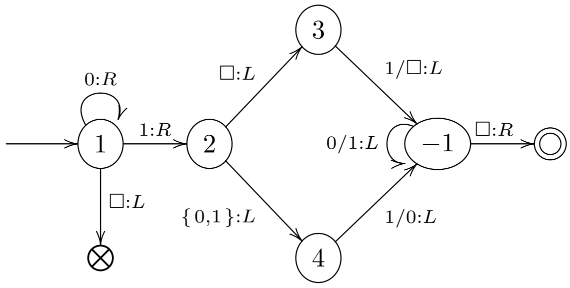
Q11. Donnez une MT M_{dec} qui décremente l'entier n écrit sur le ruban en binaire puis se replace au début du mot binaire *ie.* $M_{dec}([n]_2) = \mathbb{Acc}([n-1]_2)$ si $n > 0$ et $M_{dec}(0) = \mathbb{Exc}$ *ie.* qu'elle s'arrête dans l'état $\otimes$ pour indiquer que la fonction $M_{dec}(0)$ n'est pas définie.

Exemples :

- $\boxed{{}^\infty\Box \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, 1 \,|\, \Box^\infty} \xrightarrow{M_{dec}} \boxed{{}^\infty\Box \,|\, 1 \,|\, 1 \,|\, \Box \,|\, \Box^\infty}$ et non $\boxed{{}^\infty\Box \,|\, 1 \,|\, 1 \,|\, 0 \,|\, \Box^\infty}$
- $\boxed{{}^\infty\Box \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, 1 \,|\, 1 \,|\, \Box^\infty} \xrightarrow{M_{dec}} \boxed{{}^\infty\Box \,|\, 1 \,|\, 1 \,|\, 0 \,|\, 1 \,|\, \Box^\infty}$

SOLUTION

Principe : *On recherche le premier 1 vers la droite qu'on décrémente puis on propage la retenue (-1) vers la gauche. Attention à ne pas laisser à droite de 0 non significatifs.*

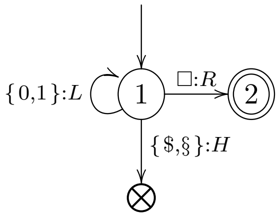


Exercice 2 : L'alphabet minimal Σ_2

Montrez qu'on peut transformer une MT M opérant sur un alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$, \S\}$ en une MT M' équivalente opérant sur l'alphabet $\Sigma_2 = \{\boxed{0}, \boxed{1}\}$.

> **Indication :** On représente les 4 symboles de $\Sigma \cup \{\Box\}$ par des couples de symboles de Σ_2 *ie.*
> $0 = (\boxed{0}, \boxed{0})$, $1 = (\boxed{1}, \boxed{1})$, $\$ = (\boxed{0}, \boxed{1})$, $\S = (\boxed{1}, \boxed{0})$
> Quand la machine M fait une transition sur un symbole de Σ la machine M' fait deux transitions.

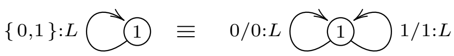
Le but de cet exercice est de transformez la machine $M_{\overleftarrow{\Box ?}}$ ci-dessous qui recherche le début d'un mot binaire $\omega \in \{0, 1\}^*$ en une machine équivalente $M'_{\overleftarrow{\Box ?}}$ opérant sur Σ_2.



Q12. Procédez par étape :

1. Commencez par rendre explicite les *macro*-transitions de la MT $M_{\overleftarrow{\Box ?}}$.

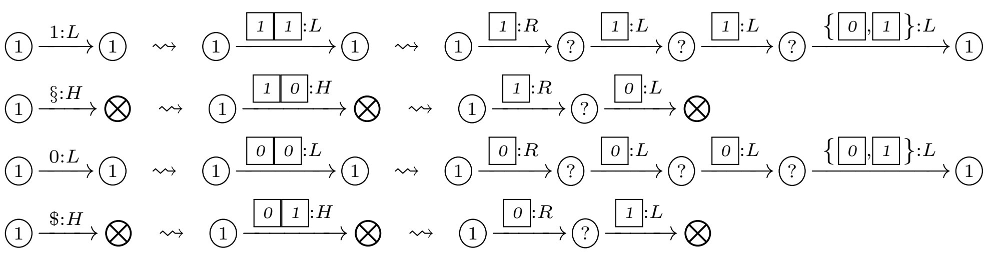
SOLUTION



---

2. Traduisez chaque transition en remplaçant les symboles par leur équivalent binaire.
3. Scindez les transitions sur plusieurs en transitions élémentaires en introduisant des états intermédiaires

SOLUTION



---

4. Fusionnez certains états pour que la MT soit déterministe.

SOLUTION

$$1 \xrightarrow{\boxed{1}:R} 3 \xrightarrow{\boxed{1}:L} ? \xrightarrow{\boxed{1}:L} ? \xrightarrow{\{\boxed{0},\boxed{1}\}:L} 1$$
$$1 \xrightarrow{\boxed{1}:R} 3 \xrightarrow{\boxed{0}:L} \otimes$$
$$1 \xrightarrow{\boxed{0}:R} 4 \xrightarrow{\boxed{0}:L} ? \xrightarrow{\boxed{0}:L} ? \xrightarrow{\{\boxed{0},\boxed{1}\}:L} 1$$
$$1 \xrightarrow{\boxed{0}:R} 4 \xrightarrow{\boxed{1}:L} \otimes$$

---

5. Réduisez le code de votre MT en fusionnant les états qui ont le même comportement.

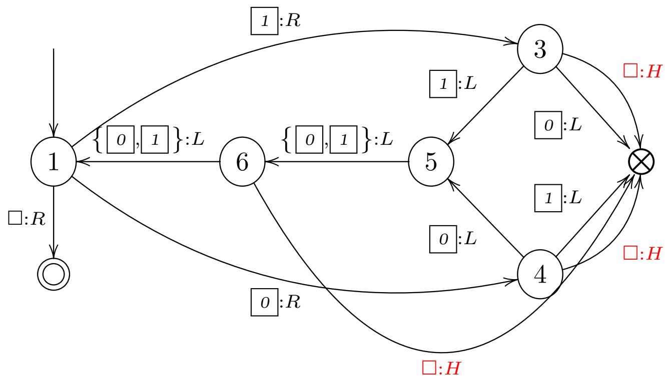
SOLUTION

$$1 \xrightarrow{\boxed{1}:R} 3 \xrightarrow{\boxed{1}:L} 5 \xrightarrow{\boxed{1}:L} 6 \xrightarrow{\{\boxed{0},\boxed{1}\}:L} 1$$
$$1 \xrightarrow{\boxed{1}:R} 3 \xrightarrow{\boxed{0}:L} \otimes$$
$$1 \xrightarrow{\boxed{0}:R} 4 \xrightarrow{\boxed{0}:L} 5 \xrightarrow{\boxed{0}:L} 6 \xrightarrow{\{\boxed{0},\boxed{1}\}:L} 1$$
$$1 \xrightarrow{\boxed{0}:R} 4 \xrightarrow{\boxed{1}:L} \otimes$$

---

6. Ajoutez des transitions vers l'état $\otimes$ lorsqu'on rencontre un $\square$ inattendu.

SOLUTION



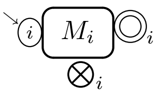
Exercice 3 : Exécution séquentielle de deux MT

Étant données deux MT

$$M_1 = (\Sigma_1, \mathcal{Q}_1, \searrow\!\bigcirc = i_1, \delta_1, \mathscr{A}cc_1 = \{\, a_1 \,\}, \mathscr{E}xc_1 = \{\, e_1 \,\})$$
$$M_2 = (\Sigma_2, \mathcal{Q}_2, \searrow\!\bigcirc = i_2, \delta_2, \mathscr{A}cc_2 = \{\, a_2 \,\}, \mathscr{E}xc_2 = \{\, e_2 \,\})$$

on souhaite construire la MT notée $[M_1; M_2]$ qui exécute M_1 puis exécute de M_2 à partir de la position où s'est arrêtée M_1.

Indication : Pour une instruction seuls deux états terminaux sont possibles $\circledcirc$ ou $\otimes$ en cas d'exception.

On suppose que toutes les MT M_i sont de la forme 

Q13. Déssinez $[M_1; M_2]$.

Q14. Définissez $[M_1; M_2]$ sous la forme $(\Sigma, \mathscr{Q}, \searrow\!\bigcirc, \delta, \mathscr{A}cc, \mathscr{E}xc)$.

SOLUTION

La formulation suivante n'est pas intuitive. On commencera par des dessins. Ensuite on essaie de formaliser, juste pour le « plaisir » de définir précisement ce qu'on a en tête.
$[M_1; M_2] = (\Sigma, \mathscr{Q}, \searrow\!\bigcirc, \delta, \mathscr{A}cc, \mathscr{E}xc)$ *avec*

$$
\begin{array}{rcl}
\Sigma & = & \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\
\mathscr{Q} & = & 1 \cdot \mathscr{Q}_1 \cup 2 \cdot \mathscr{Q}_2 = \{\, 1.q \mid q \in \mathscr{Q}_1 \,\} \cup \{\, 2.q \mid q \in \mathscr{Q}_2 \,\} \\
\searrow\!\bigcirc & = & 1.\mathbf{q}_1 \\
\delta & : & \mathscr{Q} \times \Sigma \to \Sigma \times \{\, L, H, R \,\} \times \mathscr{Q} \\
 & & \begin{array}{rcll}
 \delta(1.q, s) & = & (s, H, 2.\mathbf{q}_2) & \forall s \in \Sigma, \quad \textsf{si } q \in \mathscr{A}cc_1 (\textsf{et donc } q \not\to) \\
 \delta(1.q, s) & = & (e, d, 1.q') & \forall s \in \Sigma_1, \quad \textsf{si } q \notin \mathscr{A}cc_1 \textsf{ et } \delta_1(q, s) = (e, d, q') \\
 \delta(2.q, s) & = & (e, d, 2.q') & \forall s \in \Sigma_2, \quad \textsf{si } q \notin \mathscr{E}xc_2 \textsf{ et } \delta_2(q, s) = (e, d, q') \\
 \delta(2.q, s) & = & 2.\delta_2(q, s) & \forall s \in \Sigma_2
 \end{array} \\
\mathscr{A}cc & = & \mathscr{A}cc_2 = \{\, \circledcirc_2 \,\} \\
\mathscr{E}xc & = & \mathscr{E}xc_1 = \{\, \otimes \,\}
\end{array}
$$

Supposons $\mathscr{E}xc_1 = \{\, \otimes \,\}$ *et* $\mathscr{E}xc_2 = \{\, \otimes \,\}$ *sont les états exception de* M_1 *et* M_2*. Au lieu d'avoir deux états exception* $1.\otimes_1$ *et* $2.\otimes_2$ *dans* M*, on les identifie. On prend* $\mathscr{E}xc = \{\, \otimes \,\}$ *avec* $\otimes = 1.\otimes_1 = 2.\otimes_2$.

> **Remarque :** Il est incorrect de fusionner des états qui sont inclus dans un cycle de transitions. Ce n'est pas le cas des états exception (ni des états accepteurs) car ils n'ont pas de transitions sortantes. On peut donc les fusionner. Pour les états initiaux qui peuvent appartenir à un cycle, il faut par contre les relier par des ϵ-transitions.

On peut ensuite compléter $[M_1; M_2]$*. S'il manque une transition sur le symbole* s *dans l'état* q *on ajoute* $(q) \xrightarrow{s:H} \otimes$.

Exercice 4 : Reconnaissance de langages classiques

Soit l'alphabet $\Sigma = \{\, a, b, c \,\}$. Pour chacun des langages suivants, donnez une MT qui le reconnaît

- $L_1 = \Sigma^*$
- $L_2 = \emptyset$
- $L_3 = \{\, \epsilon \,\}$
- $L_4 = \{\, a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$
- $L_5 = \{\, \omega.R(\omega) \mid \omega \in \Sigma^* \,\}$ où R est l'opération qui renverse un mot et donc L_5 est l'ensemble des palindromes de longueur paire sur Σ **(***)**
- $L_6 = \{\, a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ **(***)**

Exercice 5 : Des MT avec états labelisés pour mémoriser des données temporaires

On considére l'alphabet $\Sigma = \{\, 0, 1, \$ \,\}$. Vous avez le droit d'utiliser les MT déjà construites, l'opérateur de séquence et les transitions génériques.

Définition 1 *Un état* (q) ***labelisé par le symbole*** ℓ *est noté* (q_ℓ)*. On garde en mémoire le symbole* ℓ *grâce au nom de l'état.*

Q15. Donnez une MT $M_{\overrightarrow{dec}}$ qui, à partir de la position courante, décale le contenu du ruban d'une case vers la droite et introduit un \$ à sa position de départ et place la tête sur le \$.

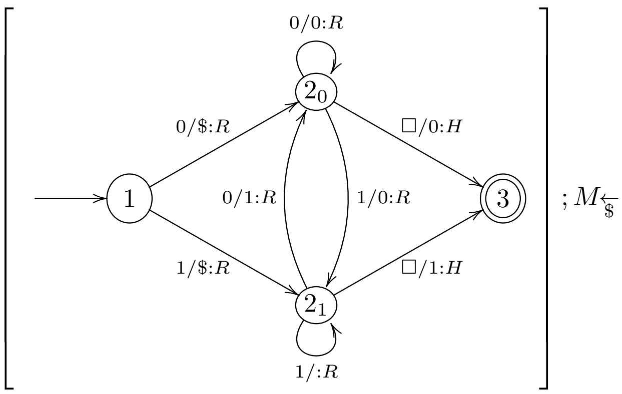
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline {}^\infty\Box & \omega_1 & \ell & \omega_2 & \Box & \Box^\infty \\ \hline & & \uparrow & & & \end{array} \xrightarrow[M_{\overrightarrow{dec}}]{}{}^* \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline {}^\infty\Box & \omega_1 & \$ & \ell & \omega_2 & \Box^\infty \\ \hline & & \uparrow & & & \end{array}$$

SOLUTION

Remarque : *Si on commence sur le symbole le plus à gauche du mot $\omega_1.\ell.\omega_2$, la question est triviale : on se décale d'une case à gauche sur le $\Box$ qu'on remplace par \$. Le cas général (on se trouve quelque part dans le mot $\omega_1.\ell.\omega_2$) est plus intéressant.*
Remarque : *Dessinez un graphe est trompeur du fait que les états (2_ℓ) et $(2_{\ell'})$ et leur transitions dépendent des symboles ℓ, ℓ'. Il préfèrable de décrire la MT par un ensemble de transitions à instancier, qui donnera le graphe de la MT après instanciation :*

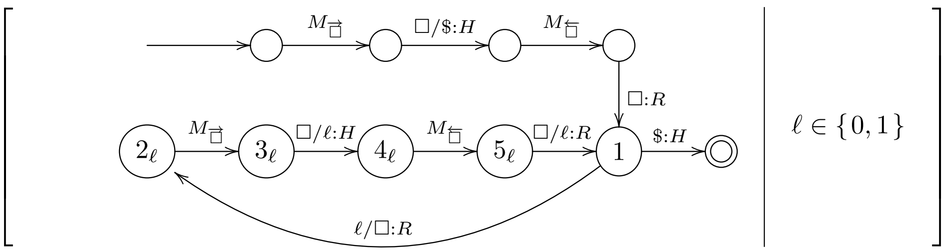
$$\left[\ \searrow(1) \xrightarrow{\ell/\$:R} (2_\ell),\ (2_\ell) \xrightarrow{\ell'/\ell:R} (2_{\ell'}),\ (2_\ell) \xrightarrow{\Box/\ell:R} ((3))\ \middle|\ \ell,\ell' \in \Sigma - \{\$\}\right];M_{\overleftarrow{\$}}$$

Dans le cas de l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$, l'instanciation de la description précédente donne la MT

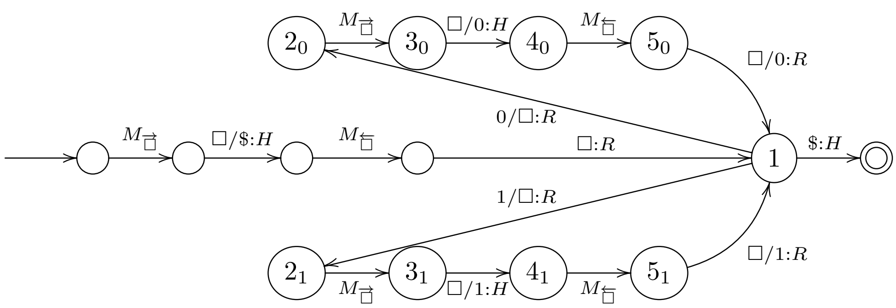


Q16. (***) On considère un alphabet quelconque Σ contenant au moins $\Box$ et \$. Donnez une MT qui recopie la donnée du ruban (partie comprise entre les $\Box$) au delà du premier $\Box$ de droite et insère un séparateur \$ entre les deux copies de la donnée. Pour simplifier, on suppose que la donnée ne contient pas de symboles \$.

SOLUTION



Dans le cas de l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$, l'instanciation de la description précédente donne la MT



Exercice 6 : Renversement et Palindrome avec des MT à deux bandes

Les transitions d'une MT à deux bandes sont de la forme $(q) \xrightarrow[\ell_2/e_2:d_2]{\ell_1/e_1:d_1} (q')$. La partie $\ell_1/e_1 : d_1$ concernent la bande B_1 et la partie $\ell_2/e_2 : d_2$ concerne la bande B_2.

Q17. Donnez un MT M_R qui réalise la fonction $R : \Sigma^* \to \Sigma^*$ qui renverse un mot fourni.

$$\begin{array}{ll} B_1 : & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} {}^{\infty}\square & s_1 & \dots & s_n & \square^{\infty} \end{array} \\ & \quad\quad\ \uparrow \\ B_2 : & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} {}^{\infty}\square & \square & \dots & \square & \square^{\infty} \end{array} \\ & \quad\quad\ \uparrow \end{array} \xrightarrow[M_R]{}{}^{*} \begin{array}{ll} B_1 : & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} {}^{\infty}\square & s_1 & \dots & s_n & \square^{\infty} \end{array} \\ & \quad\quad\ \uparrow \\ B_2 : & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} {}^{\infty}\square & s_n & \dots & s_1 & \square^{\infty} \end{array} \\ & \quad\quad\ \uparrow \end{array}$$

Q18. Donnez une MT à deux bandes M_{eq} qui *décide* si les mots inscrits sur les bandes sont identiques.

> **Indication :** M_{eq} « décide » signifie que M_{eq} termine toujours et atteint $\circledcirc$ si c'est vrai et un état $\otimes$ sinon.

Q19. À l'aides des MT précédents, donnez une MT à deux bandes M_{pal} qui accepte uniquement les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

SOLUTION

$$M_{pal} = [M_R \,;\, M_{eq}]$$

Q20. Donnez une MT à *une seule bande* M'_{pal} qui accepte les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

SOLUTION

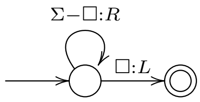
On écrit une MT qui itère la transformation suivante

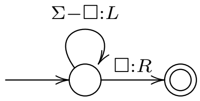
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} {}^{\infty}\square & \underset{\uparrow}{\ell} & \omega'.R(\omega') & \ell & \square^{\infty} \end{array} \longrightarrow^* \begin{array}{|c|c|c|c|c|} {}^{\infty}\square & \square & \underset{\uparrow}{\omega'}.R(\omega') & \square & \square^{\infty} \end{array}$$

et accepte si elle finit par obtenir le ruban. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} {}^{\infty}\square & \square & \underset{\uparrow}{\square} & \square & \square^{\infty} \end{array}$

$$M_{pal} \overset{def}{=} \left[\begin{array}{l} \to (\mathbf{q}_1) \xrightarrow{\square:H} \circledcirc \\ (\mathbf{q}_1) \xrightarrow{\ell:R} (\mathbf{q}'_\ell) \xrightarrow{M_{\overrightarrow{?\square}}} \begin{array}{l} (\mathbf{q}''_\ell) \xrightarrow{\ell/\square:L} (\mathbf{q}_2) \xrightarrow{M_{\overleftarrow{\square ?}}} (\mathbf{q}_1) \\ (\mathbf{q}''_\ell) \xrightarrow{\overline{\ell}/\square:H} \otimes \end{array} \end{array} \;\middle|\; \ell \in \Sigma - \{\$, \square\} \right]$$

où $\quad \overline{\ell} \overset{def}{=} \Sigma - \ell$

$M_{\overrightarrow{?\square}} \overset{def}{=}$ 

$M_{\overleftarrow{\square ?}} \overset{def}{=}$ 

Q21. Complétez $\mathscr{L}(M_{pal}) =$ ensemble des palindromes sur Σ