

**MCAL - partie MT - Examen**  
**durée : 1h30, sans document**

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6
<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8
<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9

← N'oubliez pas d'indiquer votre numéro d'anonymat en grisant les cases du tableau.

Indiquez aussi votre numéro d'étudiant au format standard

.....

**Consignes**

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres qui ne communiquent pas.
- Le sujet comporte 45 questions réparties en 6 exercices indépendants.
- Grisez les cases des bonnes réponses. Un case mal grisée est considérée comme . **Utilisez une encre foncée** ; pas de crayon à papier ou alors repassez vos réponses à l'encre avant de rendre votre copie.
- Les questions ♣ peuvent avoir *plusieurs propositions correctes*.
- Une mauvaise réponse fait perdre des points. L'absence de réponse vaut 0 point.

**1 Application du théorème de Rice**

On considère les ensembles suivants de codes binaires de MT

- $L_1 = \{m \in \mathcal{M} \mid m \in \mathcal{L}(U(m))\}$
- $L_2 = \{m \in \mathcal{M} \mid \exists \omega \in \{0, 1\}^*, U(m)(\omega) \rightarrow \odot\}$
- $L_3 = \{m \in \mathcal{M} \mid \forall \omega \in \{0, 1\}^*, U(m)(\omega) \rightarrow \odot\}$
- $L_4 = \{m \in \mathcal{M} \mid \forall \omega \in \{0, 1\}^*, U(m)(\omega) \not\rightarrow \odot\}$
- $L_5 = \{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(\varepsilon) \rightarrow \infty\}$
- $L_6 = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{L}(U(m)) \neq \{\}\}$
- $L_7 = \{m \in \mathcal{M} \mid \varepsilon \in \mathcal{L}(U(m))\}$
- $L_8 = \{m \in \mathcal{M} \mid \{0, 1\}^* \subseteq \mathcal{L}(U(m))\}$

**Question 1 ♣** Quelle(s) formulation(s) correspondent à l'ensemble des MT qui acceptent tous les mots binaires ?

<input type="checkbox"/>	$L_7$	<input type="checkbox"/>	$L_5$	<input type="checkbox"/>	$L_2$
<input type="checkbox"/>	$L_6$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_8$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_3$
<input type="checkbox"/>	$L_1$	<input type="checkbox"/>	$L_4$		

aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 2 ♣** Quelle(s) formulation(s) correspondent à l'ensemble des MT dont le langage n'est pas vide ?

<input type="checkbox"/>	$L_1$	<input type="checkbox"/>	$L_7$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_6$
<input type="checkbox"/>	$L_5$	<input type="checkbox"/>	$L_8$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_2$
<input type="checkbox"/>	$L_3$				

aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 3 ♣** Quelle(s) formulation(s) correspondent à l'ensemble des MT qui reconnaissent le langage vide ?

<input type="checkbox"/>	$L_1$	<input type="checkbox"/>	$L_8$	<input type="checkbox"/>	$L_5$
<input type="checkbox"/>	$L_6$	<input type="checkbox"/>	$L_3$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_4$
<input type="checkbox"/>	$L_7$	<input type="checkbox"/>	$L_2$		

aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 4 ♣** Quelle(s) formulation(s) correspondent à l'ensemble des MT dont l'exécution sur leur propre codage binaire est infinie.

<input type="checkbox"/>	$L_8$	<input type="checkbox"/>	$L_1$	<input type="checkbox"/>	$L_7$
<input type="checkbox"/>	$L_3$	<input type="checkbox"/>	$L_4$	<input type="checkbox"/>	$L_5$
<input type="checkbox"/>	$L_6$	<input type="checkbox"/>	$L_2$		

aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 5 ♣** Cochez les ensembles de Rice

<input checked="" type="checkbox"/>	$L_6$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_3$	<input type="checkbox"/>	$L_1$
<input type="checkbox"/>	$L_5$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_8$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_4$
<input type="checkbox"/>	$L_2$	<input checked="" type="checkbox"/>	$L_7$		

aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 6 ♣** Un ensemble de Rice non-trivial est

- non-vidé  
 indécidable  
 décidable  
 infini  
 reconnaissable  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 7 ♣** Un ensemble qui n'est pas de Rice est forcément

- reconnaissable  
 indécidable  
 défini par une condition sur le langage reconnu par les MT  
 trivial  
 décidable  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 8 ♣** Si un langage  $L$  est indécidable alors

- $L$  et  $\bar{L}$  ne sont pas reconnaissables  
 c'est un ensemble de Rice  
  $L$  est un langage infini  
  $L$  ou son complémentaire n'est pas reconnaissable  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 9 ♣** Considérons  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Cochez les cases des ensembles indécidables

- $\{m \in \mathcal{M} \mid C(\mathcal{L}(U(m)))\}$   
 où  $C(L) \stackrel{\text{def}}{=} (L = \{\})$   
  $\{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(\varepsilon) \rightarrow \odot\}$   
  $\{m \in \mathcal{M} \mid \{\} \subseteq \mathcal{L}(U(m))\}$   
  $\{m \in \mathcal{M} \mid C(\mathcal{L}(U(m)))\}$  où  $C(L) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}$   
  $\{(m, w) \in \mathcal{M} \times \{0, 1\}^* \mid m = w\}$   
  $\{(m, w) \in \mathcal{M} \times \{0, 1\}^* \mid U(m)(w) \rightarrow \odot\}$   
 aucune des réponses proposées n'est correcte

## 2 Algorithme chimique de tri

On considère le tableau ci-dessous

case	0	1	2	3	4	5
valeur	46	12	49	47	48	47

qu'on représente sous la forme d'un multi-ensemble de couples  $T(\text{case}, \text{valeur})$

$$\mathcal{M} = \{T(0, 46), T(1, 12), T(2, 49), T(3, 47), T(4, 48), T(5, 47)\}$$

**Question 10 ♣** Cochez les couples appartenant au multi-ensemble qui représente le tableau trié dans l'ordre croissant

- T(46,47)     T(3,48)     T(5,49)  
 T(1,12)     T(0,46)     T(2,47)  
 T(49,5)     T(3,47)  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 11 ♣** Si on laisse agir la règle  $(r_0) : T(i, v), T(j, v') \xrightarrow{i < j} T(i, v'), T(j, v)$  sur le multi-ensemble  $\mathcal{M}$  de départ

- la règle ne peut pas s'appliquer  
 l'exécution s'arrête  
 l'exécution ne termine pas  
 le multi-ensemble finira par être trié dans l'ordre croissant  
 le multi-ensemble finira par être trié dans l'ordre décroissant  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 12 ♣** Si on laisse agir la règle  $(r_1) : T(i, v), T(i+1, v') \xrightarrow{v' < v} T(i, v'), T(i+1, v)$  sur le multi-ensemble  $\mathcal{M}$  de départ

- l'exécution s'arrête  
 la règle ne peut pas s'appliquer  
 le multi-ensemble finira par être trié dans l'ordre décroissant  
 l'exécution ne termine pas  
 le multi-ensemble finira par être trié dans l'ordre croissant  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 13** Quel est le minimum d'applications de  $(r_1)$  nécessaires pour que  $\mathcal{M}$  soit trié

- 1     2     5     4  
  $\infty$      6     3

**Question 14** Quel est le minimum d'étapes nécessaires avec  $(r_1)$  pour que  $\mathcal{M}$  soit trié

- 3     2      $\infty$      1     4     5  
 6

**Question 15 ♣** Si on laisse agir la règle  $(r_2) : T(i, v), T(j, v') \xrightarrow{i < j \wedge v < v'} T(i, v'), T(j, v)$  sur le multi-ensemble  $\mathcal{M}$  de départ

- la règle ne peut pas s'appliquer  
 le multi-ensemble finira par être trié dans l'ordre croissant  
 l'exécution ne termine pas  
 le multi-ensemble finira par être trié dans l'ordre décroissant  
 l'exécution s'arrête  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 16** Quel est le minimum d'applications de  $(r_2)$  nécessaires pour que  $\mathcal{M}$  soit trié

- $\infty$     4    6    1    2    5    3

**Question 17** Quel est le minimum d'étapes nécessaires avec  $(r_2)$  pour que  $\mathcal{M}$  soit trié

- $\infty$     4    2    6    1    5    3

**Question 18 ♣** Que se passe-t'il si on met ensemble les règles  $(r_1)$  et  $(r_2)$  ?

- l'exécution s'arrête avec un multi-ensemble trié dans l'ordre croissant  
 les données sont inchangées car les règles sont contradictoires  
 la vitesse de la règle  $(r_2)$  l'emporte sur celle de la règle  $(r_1)$   
 l'exécution se stabilise mais le multi-ensemble n'est pas ordonné  
 l'exécution s'arrête avec un multi-ensemble trié dans l'ordre décroissant  
 l'exécution s'arrête car le multi-ensemble devient vide  
 la vitesse de la règle  $(r_1)$  l'emporte sur celle de la règle  $(r_2)$   
 l'exécution ne termine pas  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

### 3 À propos de $U$ , la machine de Turing universelle

On considère  $\omega$  un mot de  $\{0, 1\}^*$ , une MT  $M$  opérant sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  et  $m$  le codage de  $M$  en binaire sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ .

**Question 19** Si l'exécution de  $M$  sur  $\omega$  ne termine pas alors l'exécution de  $U(m, \omega)$

- peut ne pas terminer  
 ne doit pas terminer  
 doit terminer dans l'état  $\otimes$

**Question 20** Si l'exécution de  $M$  sur  $\omega$  termine dans l'état  $\otimes$  alors  $U(m, \omega)$

- peut ne pas terminer  
 doit terminer dans l'état  $\otimes$   
 doit terminer dans l'état  $\odot$  si l'exécution de  $U$  se termine normalement

**Question 21 ♣** Si l'exécution de  $M$  sur  $m$  termine dans l'état  $\odot$  alors

- $U$  accepte la machine  $m$   
  $U(m)$  accepte le mot  $m$   
 l'exécution  $U(m, m)$  termine dans l'état  $\odot$   
 absurde, il est impossible d'exécuter  $M$  sur  $m$   
  $(m, m) \in \mathcal{L}(U)$   
 la MT  $M$  reconnaît son propre code binaire  
 l'exécution  $U(M, m)$  doit donner le même résultat  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 22 ♣** Si une MT  $M$ , déterministe, est incomplète cela signifie nécessairement que

- au moins un état non-terminal n'a pas transition pour un symbole de  $\Sigma \cup \{\square\}$   
 on doit compléter  $M$  en ajoutant à chaque état une boucle  $\xrightarrow{s/s:H}$  pour chaque symbole oublié  
  $M$  sera non-déterministe si on ajoute des transitions  
 certains états de  $M$  ont plusieurs transitions pour un même symbole  
 il existe des symboles sur le ruban qui ne sont pas prévus par l'alphabet  
 on peut compléter  $M$  en ajoutant des transitions qui pointent vers  $\otimes$   
 il manque l'état accepteur ou l'état exception  
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 23 ♣** Lors de l'exécution de  $U(m, w)$  si  $U$  ne trouve aucune transition de  $m$  correspondant au ruban

- $U$  passe dans l'état  $\otimes$   
  $U$  reprend la recherche au début des transitions de  $m$   
  $U$  passe dans l'état  $\odot$  si l'état courant de  $m$  est  $\odot$   
  $U$  passe dans l'état  $\otimes$  si l'état courant de  $m$  n'est pas  $\odot$   
 aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 24 ♣** Cochez les affirmations correctes

- $m \in \{0, 1\}^*$   
  $U(\dots)$  est un interpréteur  
  $m = [M]_2$   
  $U(M) \equiv m$   
  $m$  est un code source  
  $U(m)(\omega) \equiv U(m, \omega)$   
  $U(m)(\omega) \equiv U(\omega)(m)$   
  $U(m, \omega) \equiv M(\omega)$   
  $U(m) \equiv M$   
 le code de  $M$  ne peut pas s'écrire en binaire  
  $U(m)$  est un exécutable

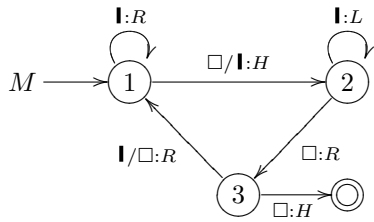
- $U(\dots)$  est un compilateur
- $U(m, m)$  n'est pas une exécution valide
- $U(U(\cdot), U(\cdot))$  est un optimiseur de code
- $m$  est un exécutable
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 25 ♣** Il est possible de concevoir une MT  $U$ , prenant en paramètre le couple  $(m, \omega)$ ,

- capable de décider si le code  $m$  est un code de MT ou non
- a une seule bande
- capable de décider si le code  $m$  correspond à une MT complète
- capable de décider si l'exécution de  $m$  sur  $\omega$  sera infinie
- capable de décider si le mot  $\omega$  est une entrée acceptée par  $m$
- et de donner son codage binaire  $u$
- capable de détecter après un certain nombre de pas que l'exécution de  $m$  sur  $\omega$  est infinie
- aucune des réponses proposées n'est correcte

### 4 Castors affairés

Parmi les MT à  $k$  états + l'état  $\odot$  opérant sur  $\Sigma = \{ \mathbf{I} \}$ , les castors affairés à  $k$  états sont celles qui ont la plus longue exécution sur le mot  $[k]_1$ . On considère la MT suivante



**Question 26 ♣** Cochez les affirmations correctes. À quoi correspond  $[k]_1$  sur un ruban ?

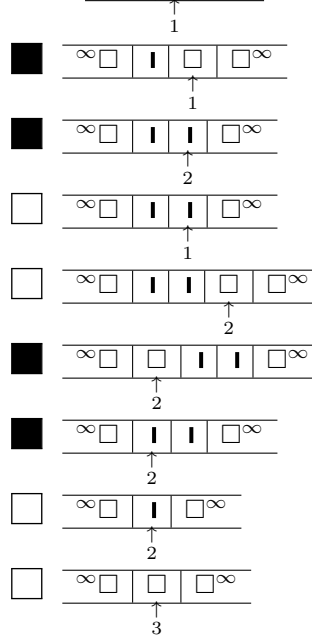
- à l'écriture de l'entier  $k$  en base 1
- à l'écriture de l'entier  $k$  en base 2 où  $\square$  représente 0 et  $\mathbf{I}$  représente 1
- à  $k - 1$  symboles 0 suivi d'un 1
- absurde, il est impossible d'écrire  $k$  en base 1
- à  $k$  batonnets
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 27 ♣** Cochez les affirmations correctes

- pour  $k$  fixé, l'ensemble des castors affairés à  $k$  états est fini
- le castor affairé à  $k$  états est forcément unique

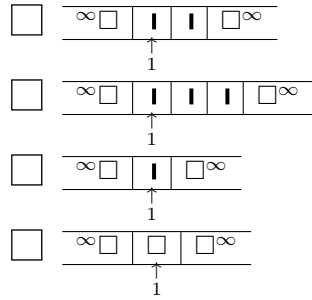
- le castor affairé à 8 états n'est pas encore connu
- il n'existe pas de castor affairé à 7 états
- un castor affairé est forcément complet
- un castor affairé termine pour toute entrée
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 28 ♣** Cochez les configurations par lesquelles passe le ruban lorsqu'on exécute la MT  $M$  sur le ruban  $\infty \square \mathbf{I} \square \infty$ .



aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 29 ♣** Cochez les rubans pour lesquelles l'exécution de la MT  $M$  termine.



aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 30** Après combien de pas d'exécution de la MT  $M$  tombe sur une configuration déjà vue ?

- $\infty$
- 7
- 1
- 6
- jamais
- 5
- 3

**Question 31 ♣** Cochez les affirmations correctes. En fixant l'alphabet  $\Sigma = \{ \mathbf{I} \}$

- l'ensemble de tous les castors affairés ( $\forall k$ ) est infini
- l'ensemble des MT est infini
- l'ensemble de tous les castors affairés ( $\forall k$ ) est fini

- l'ensemble de tous les castors affairés ( $\forall k$ ) est dénombrable
- l'ensemble des MT est fini
- l'ensemble des MT est dénombrable
- l'ensemble des MT n'est pas dénombrable
- l'ensemble de tous les castors affairés ( $\forall k$ ) n'est pas dénombrable
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 32 ♣** Cochez les affirmations correctes. L'exécution d'un castor affairé à  $k$  états sur le ruban  $[k]_1$

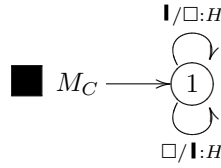
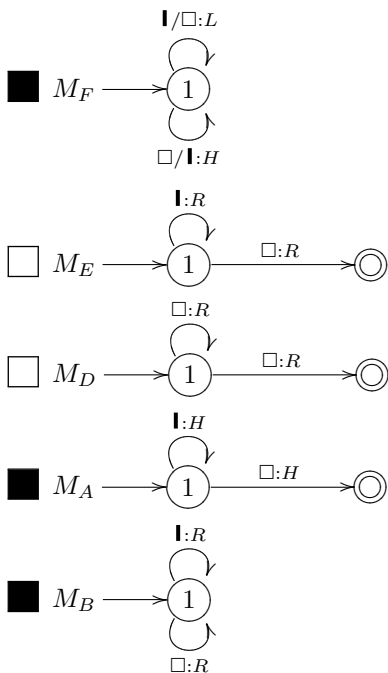
- écrit  $k$  en base 1 et s'arrête
- termine en  $k$  étapes
- termine pour l'entrée  $[k]_1$
- remplit la moitié du ruban de **I**
- écrit le plus de **I** et s'arrête
- remplit le ruban de **I**
- a la plus longue exécution finie
- utilise uniquement les symboles **I** et  $\square$
- ne termine pas
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 33** La MT  $M$  est-elle un castor affairé ?

- non
- oui

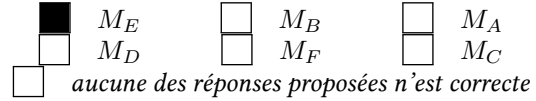
## 5 Exécutions de MT

**Question 34 ♣** Cochez les MT qui **ne terminent pas** lorsqu'on les exécute sur le ruban  $\infty \square \square \mathbf{I} \square \infty$ .



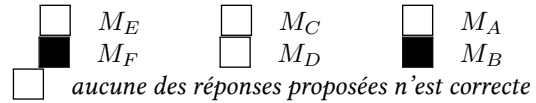
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 35 ♣** Cochez les MT qui terminent forcément quel que soit le ruban de départ.



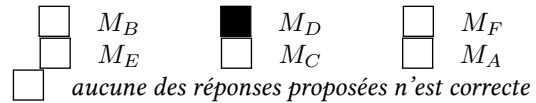
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 36 ♣** Cochez les MT qui visitent une infinité de cases différentes du ruban lorsqu'on les exécute sur le ruban  $\infty \square \square \mathbf{I} \square \infty$ .



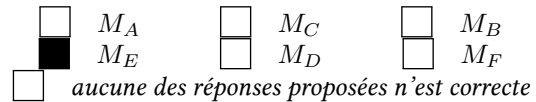
- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 37 ♣** Cochez les MT non-déterministes



- aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 38 ♣** Cochez les MT qui sont des castors affairés lorsqu'on les exécute sur le ruban  $\infty \square \square \mathbf{I} \square \infty$ .



- aucune des réponses proposées n'est correcte

## 6 Décidabilité

**Question 39** Une MT a une seule bande termine toujours.

- ABSURDE
- VRAI
- FAUX

**Question 40** L'ensemble des MT complémentaires est reconnaissable.

- ABSURDE
- FAUX
- VRAI

**Question 41** Aucun langage infini ne peut être reconnu par une MT.

- FAUX
- VRAI
- ABSURDE

**Question 42** La MT  $\rightarrow \odot$  reconnaît un langage infini.

ABSURDE     VRAI     FAUX

**Question 43** Un langage fini est forcément reconnaissable par une MT.

VRAI     ABSURDE     FAUX

**Question 44 ♣** Si un langage  $L$  est décidable alors  $L$  et son complémentaire sont reconnaissables

il existe une MT  $M$  qui reconnaît  $L$  et  $\bar{L}$

il existe une MT qui reconnaît  $L$

il existe une MT qui reconnaît  $\bar{L}$

$L$  ou son complémentaire est reconnaissable

aucune des réponses proposées n'est correcte

**Question 45** Une MT qui décide un langage  $L$ , reconnaît  $L$  et reconnaît son complémentaire.

ABSURDE

VRAI

FAUX