NUMÉRO DE SALLE ...... NUMÉRO DE PLACE ...... NUMÉRO D'ANONYMAT ....

MCAL MT – Examen

Durée : 1h30, sans document

— N'oubliez pas d'indiquer votre numéro d'anonymat **sur chaque feuille du sujet et sur votre copie**.

— N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie à la fin de l'épreuve.

— Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés.

— Le sujet est sur 34 points et comporte 5 exercices indépendants.

— Le barème et le minutage sont donnés à titre indicatif.

— Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres qui ne communiquent pas.

Exercice 1 : Puissance des modèles de calcul (15 min) (6 pt)

Répondez aux questions suivantes par VRAI/FAUX et **justifiez votre réponse. Une réponse sans justification ne donne pas de point.**

1. Lorsqu'on l'exécute sur un ruban vierge une MT termine forcément.
2. Il n'existe aucun moyen de montrer que deux modèles de calculs sont équivalents (par exemple les langages impératifs tels que C et les machines de Turing).
3. Il existe un algorithme qui à partir du code d'une MT m et d'un mot ω peut décider si l'exécution de m sur ω va terminer.
4. Une MT peut s'arrêter pour une infinité de mots et ne pas terminer pour une infinité de mots.
5. L'ensemble $\{0,1\}^*$ des mots binaires est reconnaissable par une machine de Turing.
6. Si L est un langage infini alors il n'existe pas de machine de Turing qui le reconnaît.
7. Si une machine de Turing reconnaît un langage, alors il existe forcément une machine de Turing qui reconnaît son complémentaire.
8. Il existe des algorithmes qu'on peut réaliser avec une machine de Turing à deux bandes mais pas avec une machine de Turing à une seule bande.

Exercice 2 : Applications du Théorème de Rice (15 min) (7 pt)

Q1. (0.5 pt) **Complétez :** Un mot ω appartient au langage d'une MT M si ....
À l'inverse, ω n'appartient pas au langage d'une MT M si .... *ou* ....

Q2. (0.5 pt) **Complétez :** Un ensemble de ....
.... est un ensemble de Rice s'il s'écrit $\{m \mid \mathcal{C}(\ldots\ldots\ldots\ldots)\}$ où $\mathcal{C}$ est ....
portant sur .... m

Q3. (0.5 pt) **Complétez :** Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des codages binaires des machines de Turing. Tout ensemble de Rice ...., c'est-à-dire dont la condition est différente de .... et de ..., est ....

Q4. (1.5 pt) **Formalisez en termes mathématiques les ensemble suivants**

1. L'ensemble des machines de Turing qui reconnaissent les mêmes mots que la MT BB_8 (le 8e Busy Beaver)
   $L_a = \{ m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
2. L'ensemble des machines de Turing qui acceptent au moins tous les mots binaires formés uniquement de 1
   $L_b = \{ m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
3. L'ensemble des machines de Turing sur l'alphabet Σ dont le langage est inclus dans Σ^*
   $L_c = \{ m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
4. L'ensemble des machines de Turing qui n'acceptent aucun mot
   $L_d = \{ m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
5. L'ensemble des machines de Turing qui ne terminent pas si on les exécute sur un ruban vierge
   $L_e = \{ m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
6. L'ensemble des machines de Turing qui reconnaissent uniquement des mots de taille ≤ 42
   $L_f = \{ m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

Parmi les ensembles L_a à L_f, certains sont des ensembles de Rice, peut-être pas tous.

Q5. (2 pt) **Indiquez les ensembles de Rice parmi L_a à L_f. Justifiez chaque réponse.**

Indication : Vous rédigerez votre réponse de la manière suivante en définissant la condition de Rice, $\mathcal{C}$, correspondant à l'ensemble : « … *est*
$\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ \ldots\ )\}$ *avec* $\mathcal{C}(\ldots) \stackrel{\text{def}}{=} \ldots$ »

Q6. (1 pt) Parmi les ensembles précédents, lesquels sont indécidables ?

Indication : +0.25 par bonne réponse, -0.25 par mauvaise réponse.

……………………………………………………………………………………………………

Q7. (1 pt) Que peut-on dire des deux autres ? **Justifiez votre réponse.**

Exercice 3 : Réalisation de la machine de Turing universelle (20 min) (7.5 pt)

Préambule Pour simplifier la réalisation de la MT U, on commence par l'implanter sous la forme d'une machine à deux bandes.
On considère que m représente la liste des transitions d'une MT M. L'exécution de $U(m)(\omega)$ doit simuler l'exécution de M sur le mot ω.

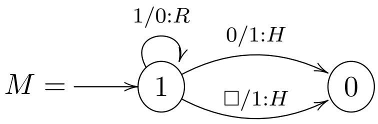
— **La bande B_1 contiendra la liste des transitions de M,** les unes à la suite des autres, sans séparateur. Une transition $\mathbf{q} \xrightarrow{\ell/e:d} \mathbf{q}'$ où $[\mathbf{q}]_2 = b_1 \ldots b_n$ et $[\mathbf{q}']_2 = b'_1 \ldots b'_n$ sont les représentations binaires sur n bits de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q}'$ sera notée $\boxed{(}\boxed{b_1}\boxed{\ldots}\boxed{b_n}\boxed{)}\boxed{\ell}\boxed{e}\boxed{d}\boxed{(}\boxed{b'_1}\boxed{\ldots}\boxed{b'_n}\boxed{)}$

— **La bande B_2 contiendra la configuration courante de l'exécution de M**

$$B_2 = \boxed{{}^\infty\square}\boxed{\omega_1}\boxed{(}\boxed{[\mathbf{q}]_2}\boxed{)}\boxed{\ell}\boxed{\omega_2}\boxed{\square^\infty}$$

où ω_1 représente la partie du ruban de M située à gauche de la tête de M, ω_2 représente la partie du ruban située à droite de la tête de M. La tête (simulée) de M est donc située sur le symbole ℓ. L'état courant ($\mathbf{q}$) de la MT M est inscrit en représentation binaire, entre w_1 et ℓ et entre parenthèses ; on ne se préocupe pas pour l'instant du statut ◎, ⊗, ◯ de l'état.

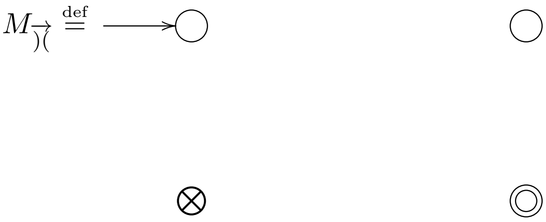
Q8. (1 pt) Donnez la bande B_1 correspondant à la liste des transitions de la MT ci-après.



Q9. (0.25 pt) Donnez la bande B_2 correspondant à la configuration de départ de l'exécution de la machine M sur le mot binaire 101.

Q10. (0.75 pt) Donnez les configurations successives de B_2 par lesquelles passe l'exécution de M sur le mot binaire 101.

Q11. (1.5 pt) Dessinez une MT $M_{\overrightarrow{)(}}$ à une bande qui recherche vers la droite la séquence «)(» et se place sur la parenthèse ouvrante.

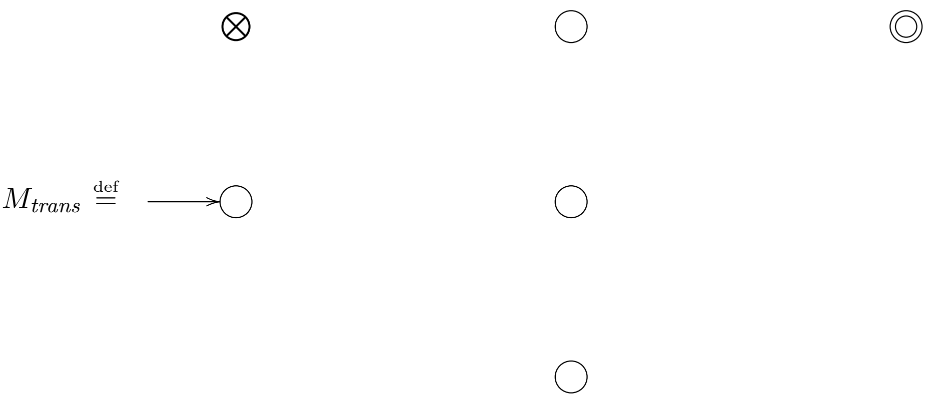


Q12. (0.75 pt) Donnez une transition de MT à deux bandes qui détecte si les têtes de lecture de la bande B_1 et de la bande B_2 pointent **sur des symboles différents de l'ensemble Σ puis effectue le même déplacement d des deux têtes**. Dans la suite on notera $\xrightarrow{\overset{\Sigma}{\neq}:d}$ ce type de transition.

Q13. (0.75 pt) Donnez une transition de MT à deux bandes qui détecte si les têtes de lecture de la bande B_1 et de la bande B_2 pointent **sur un même symbole de l'ensemble Σ puis effectue le même déplacement d des deux têtes**. Dans la suite on notera $\xrightarrow{\overset{\Sigma}{=}:d}$ ce type de transition.

Q14. (2.5 pt) Dessinez une MT M_{trans} à 2 bandes qui recherche sur la bande B_1 la transition applicable à la configuration courante inscrite sur B_2. On suppose que la machine $M_{trans}(B_1)(B_2)$ est toujours appelée avec la tête de B_1 positionnée sur le symbole « (» de la première transition et celle de B_2 positionnée sur le symbole « (» de la configuration. La machine M_{trans} termine en ◎ si elle trouve une transition applicable et en ⊗ sinon.

Indication : Vous pouvez utiliser les notations définies dans les deux questions précédentes.



Exercice 4 : Un résultat fondamental (15 min) (5 pt)

Le but de cet exercice est de démontrer la proposition suivante

Proposition 1 *Un langage L est décidable* $\overset{(i)}{\Longleftarrow}\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ *le langage L et son complémentaire $\overline{L}$ sont reconnaissables.*

Q15. (1 pt) **Commençons par rappeler les définitions**

— un langage L est reconnaissable s'il existe une MT M_1 telle que .... $\omega \in L$

— un langage L est décidable s'il existe une MT M ....

et telle que .... $\omega \in L$ et .... $\omega \in \overline{L}$

Indication : On notera M la machine de Turing qui décide L, M_1 celle qui reconnaît L et M_2 celle qui reconnaît $\overline{L}$

Q16. (1.25 pt) **Complétez :** L'implication ($\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$) est facile à montrer. Il suffit d'appliquer les définitions. Soit ..... la MT .... On doit montrer

— qu'.. et

— qu'...

On choisit de prendre

$M_1(\omega) \overset{\text{def}}{=}$ ....

$M_2(\omega) \overset{\text{def}}{=}$ [..
....]

Q17. (0.75 pt) **Complétez :** Démontrons l'implication ($\overset{(i)}{\Longleftarrow}$). On suppose que L est reconnaissable par une une MT ...... et $\overline{L}$ est reconnaissable par une MT .... On doit montrer que L est décidable, c'est-à-dire qu'on doit construire à ...., une MT ..... qui ....

Q18. (2 pt) Expliquez comment construire M qui décide L ?

NUMÉRO DE SALLE ...... NUMÉRO DE PLACE ...... NUMÉRO D'ANONYMAT ....

Exercice 5 : Indécidabilité directe & Réduction (25 min) (8.5 pt)

Le but de cet exercice est de refaire une preuve du cours en deux temps : on montre tout d'abord qu'un langage L_{ad} est non-reconnaissable ; pour ensuite en déduire, par réduction, que le langage L_{uc} est lui-aussi non-reconnaissable. La preuve est une variante moins directe mais plus simple que celle du cours.
On considère le langage L_{ad}, dit « anti-diagonale », et le langage L_{uc} définis par

$$\begin{aligned} L_{ad} &= \{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(m) \not\to \circledcirc\} \\ L_{uc} &= \{(m,\omega) \in \mathcal{M} \times \{0,1\}^* \mid U(m,w) \not\to \circledcirc\} \end{aligned}$$

Q19. (0.5 pt) Décrire L_{ad} par une phrase en français.

Q20. (0.5 pt) Décrire L_{uc} par une phrase en français.

Le langage anti-diagonale n'est pas reconnaissable

Q21. (3 pt) Complétez la preuve que L_{ad} est non-reconnaissable.

Preuve par contradiction .... il existe une MT M_{ad} qui reconnait L_{ad}, cela signifie que

$$\mathscr{L}(M_{ad}) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad m \in L_{ad} \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exhibons la contradiction : Considérons maintenant m_{ad}, le codage binaire de M_{ad} et demandons-nous si m_{ad} appartient à $\mathscr{L}(M_{ad})$? On peut répondre de deux manières à la question $\boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})}$?

(i) par définition du .... par une MT, on a l'équivalence

$$\boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})} \overset{(i)}{\iff} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(ii) par définition du ...., on a l'équivalence

$$\begin{aligned} \boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})} &\iff \ldots\ldots\ldots\{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(m) \not\to \circledcirc\} \\ &\qquad \textit{puisque} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\iff U(\ldots\ldots)(\ldots\ldots) \not\to \circledcirc \\ &\overset{(ii)}{\iff} \ldots\ldots(m_{ad}) \not\to \circledcirc \quad \textit{puisque} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Finalement,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to \circledcirc \overset{(i)}{\iff} \boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})} \overset{(ii)}{\iff} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \not\to \circledcirc$$

Les équivalences (i) et (ii) aboutissent à une CONTRADICTION puisque l'exécution de .... est censée terminer dans l'état $\circledcirc$ d'après (i) et ne pas terminer dans l'état $\circledcirc$ d'après (ii).
Conclusion : En supposant qu'il existe une MT qui .... on aboutit à une contradiction ; donc .... □

Réduction de L_{ad} à L_{uc} (15 min) (4.5 pt)

Q22. (1.25 pt) **Complétez les pointillés :** Considérons le diagramme de réduction de L_{ad} à L_{uc}

$$\begin{array}{rcl}
m \in \ldots\ldots & \xrightarrow[\textit{traduction}]{M_R} & R(m) \in \ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m \in L_{ad} & \overset{}{\underset{(\ddagger)}{\Longleftrightarrow}} & R(m) \in L_{uc} \\
L_{ad} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & L_{uc} \text{ reconnaissable} \\
L_{ad} \text{ non-reconnaissable} & \ldots\ldots\ldots & L_{uc} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_{ad} \text{ indécidable} & \ldots\ldots\ldots & L_{uc} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_{ad} \text{ décidable} & \ldots\ldots\ldots & L_{uc} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Q23. (0.75 pt) **Complétez :** Pour déduire que L_{uc} est non-reconnaissable on peut exploiter le diagramme précédent à condition

1. de donner une MT M_R qui .... couple .... à partir d'un codage binaire de machine m
2. de prouver que ....
3. de prouver ....

Q24. (0.75 pt) On a vu en cours que $U(m)(\omega) = U(m,\omega)$ mais il y a une subtile différence entre $U(m)(\omega)$ et $U(m,\omega)$, laquelle ? Détaillez votre réponse.

Q25. (1.25 pt) **Complétez :** L'équivalence (‡) est particulièrement simple à démontrer :

$$\begin{array}{rcll}
m \in L_{ad} & \Longleftrightarrow & U(m)(m) \not\to \circledcirc & \text{par } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \Longleftrightarrow & U \ldots\ldots\ldots\ldots \not\to \circledcirc & \text{d'après } \textbf{Q24} \\
& \Longleftrightarrow & \ldots\ldots\ldots\ldots \in L_{uc} & \text{par } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \Longleftrightarrow & R(m) \in L_{uc} & \text{par } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m \in L_{ad} & \overset{(\ddagger)}{\Longleftrightarrow} & R(m) \in L_{uc} & \text{est donc démontrée}
\end{array}$$

Q26. (0.5 pt) **Complétez** La question précédente suggère de prendre $R(m) \overset{\text{def}}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La MT $M_R(m)$ se contente donc de ....
....