NUMÉRO DE SALLE ...... NUMÉRO DE PLACE ...... NUMÉRO D'ANONYMAT ....

MCAL MT – Examen

Durée : 1h30, sans document

- N'oubliez pas d'indiquer votre numéro d'anonymat **sur chaque feuille du sujet et sur votre copie**.
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie à la fin de l'épreuve.
- Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés.
- Le sujet est sur 34 points et comporte 5 exercices indépendants.
- Le barème et le minutage sont donnés à titre indicatif.
- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres qui ne communiquent pas.

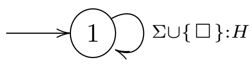
Exercice 1 : Puissance des modèles de calcul

Répondez aux questions suivantes par VRAI/FAUX et **justifiez votre réponse. Une réponse sans justification ne donne pas de point.**

1. Lorsqu'on l'exécute sur un ruban vierge une MT termine forcément.

SOLUTION

FAUX. *Voici une* MT *qui ne termine pas, même sur ruban vierge.*



2. Il n'existe aucun moyen de montrer que deux modèles de calculs sont équivalents (par exemple les langages impératifs tels que C et les machines de Turing).

SOLUTION

FAUX. *Il suffit de montrer comment simuler tout programme C par une* MT *et montrer comment implanter les* MT *en C. On prouve ainsi que tout ce que peut faire un modèle peut être effectué dans l'autre.*

3. Il existe un algorithme qui à partir du code d'une MT m et d'un mot ω peut décider si l'exécution de m sur ω va terminer.

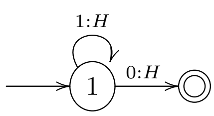
SOLUTION

FAUX. *Si un tel algorithme existait il déciderait le langage L_{EF} qu'on a prouvé indécidable en cours.*

4. Une MT peut s'arrêter pour une infinité de mots et ne pas terminer pour une infinité de mots.

SOLUTION

VRAI. *On peut construire une* MT *qui s'arrête pour tous les mots commençant par 0 et qui boucle pour les mots commençant par 1.*



5. L'ensemble $\{0,1\}^*$ des mots binaires est reconnaissable par une machine de Turing.

SOLUTION

VRAI. $M \stackrel{def}{=} \rightarrow \circledcirc$ *opérant sur l'alphabet* $\Sigma = \{0,1\}$ *reconnaît* $\{0,1\}^*$.

6. Si L est un langage infini alors il n'existe pas de machine de Turing qui le reconnaît.

SOLUTION

FAUX. *Le langage précédent est infini puisqu'il contient entre autres les mots formés d'une séquence arbitraire de 1, or il reconnaissable par une* MT.

7. Si une machine de Turing reconnaît un langage, alors il existe forcément une machine de Turing qui reconnaît son complémentaire.

SOLUTION

FAUX. *Contre-exemple : La machine de Turing universelle U reconnaît le langage universel*

$$L_U = \{\, (m, \omega) \mid U(m, \omega) \to \circledcirc \,\} = \mathscr{L}(U).$$

Or $\overline{L_U}$ n'est pas reconnaissable par une MT *(cf. cours).*

8. Il existe des algorithmes qu'on peut réaliser avec une machine de Turing à deux bandes mais pas avec une machine de Turing à une seule bande.

SOLUTION

FAUX *puisqu'on peut montrer l'équivalence entre les deux modèles en utilisant le principe du (2.) : on peut traduire une* MT *à deux bandes en une* MT *à une seule bande (cf. TD2) et on peut voir une machine de Turing à une bande comme une* MT *à deux bandes (dont on n'utilise pas le seconde bande).*

Exercice 2 : Applications du Théorème de Rice

Q1. Complétez : Un mot ω appartient au langage d'une MT M si $M(\omega) \to \circledcirc$. À l'inverse, ω n'appartient pas au langage d'une MT M si $M(\omega) \to \otimes$ *ou* $M(\omega) \to^{\infty}$.

Q2. Complétez : Un ensemble de codages binaires de machine de Turing est un ensemble de Rice s'il s'écrit $\{\, m \mid \mathcal{C}(\mathscr{L}(U(m)))\,\}$ où $\mathcal{C}$ est une condition portant sur le langage reconnu par la machine m

Q3. Complétez : Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des codages binaires des machines de Turing. Tout ensemble de Rice non-trivial, c'est-à-dire dont la condition est différente de $\mathbb{V}$ et de $\mathbb{F}$, est indécidable.

Q4. Formalisez en termes mathématiques les ensemble suivants

1. L'ensemble des machines de Turing qui reconnaissent les mêmes mots que la MT BB_8 (le 8[e] Busy Beaver)

   $L_a = \{ m \in \mathcal{M} \mid \mathscr{L}(U(m)) = \mathscr{L}(\mathrm{BB}_8) \}$

2. L'ensemble des machines de Turing qui acceptent au moins tous les mots binaires formés uniquement de 1

   $L_b = \{ m \in \mathcal{M} \mid \{1\}^* \subseteq \mathscr{L}(U(m)) \}$

3. L'ensemble des machines de Turing sur l'alphabet Σ dont le langage est inclus dans Σ^*

   $L_c = \{ m \in \mathcal{M} \mid \mathscr{L}(U(m)) \subseteq \Sigma^* \}$

4. L'ensemble des machines de Turing qui n'acceptent aucun mot

   $L_d = \{ m \in \mathcal{M} \mid \mathscr{L}(U(m)) = \emptyset \}$

5. L'ensemble des machines de Turing qui ne terminent pas si on les exécute sur un ruban vierge

   $L_e = \{ m \in \mathcal{M} \mid U(m)(\epsilon) \to^{\infty} \}$

6. L'ensemble des machines de Turing qui reconnaissent uniquement des mots de taille ≤ 42

   $L_f = \{ m \in \mathcal{M} \mid \forall \omega \in \mathscr{L}(U(m)), |\omega| \leq 42 \}$

Parmi les ensembles L_a à L_f, certains sont des ensembles de Rice, peut-être pas tous.

Q5. **Indiquez les ensembles de Rice parmi L_a à L_f. Justifiez chaque réponse.**

Indication : Vous rédigerez votre réponse de la manière suivante en définissant la condition de Rice, $\mathcal{C}$, correspondant à l'ensemble : « ... *est* $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ \dots\ )\}$ *avec* $\mathcal{C}(\dots) \stackrel{\text{def}}{=} \dots$ »

SOLUTION

- *L'ensemble L_a est un ensemble de Rice car il peut s'écrire*
  $\{m \in \mathcal{M} \mid \boxed{\mathscr{L}(U(m))} = \mathscr{L}(\mathrm{BB}_8)\} = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\boxed{\mathscr{L}(U(m))})\}$
  avec $\mathcal{C}(\boxed{}) \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{} = \mathscr{L}(\mathrm{BB}_8)$
- *L'ensemble L_b est un ensemble de Rice car il peut s'écrire*
  $\{m \in \mathcal{M} \mid \{1\}^* \subseteq \boxed{\mathscr{L}(U(m))}\} = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\boxed{\mathscr{L}(U(m))})\}$
  avec $\mathcal{C}(\boxed{}) \stackrel{\text{def}}{=} \{1\}^* \subseteq \boxed{}$
- *L'ensemble L_c est un ensemble de Rice car il peut s'écrire*
  $\{m \in \mathcal{M} \mid \boxed{\mathscr{L}(U(m))} \subseteq \Sigma^*\} = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\boxed{\mathscr{L}(U(m))})\}$
  avec $\mathcal{C}(\boxed{}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{V}$ *puisque tout langage est inclus dans* Σ^*
- *L'ensemble L_d est un ensemble de Rice car il peut s'écrire*
  $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathscr{L}(U(m)) = \emptyset\} = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\boxed{\mathscr{L}(U(m))})\}$
  avec $\mathcal{C}(\boxed{}) \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{} = \emptyset$
- *L'ensemble L_f est un ensemble de Rice car il peut s'écrire*
  $\{m \in \mathcal{M} \mid \forall \omega \in \boxed{\mathscr{L}(U(m))}, |\omega| \leq 42\} = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\boxed{\mathscr{L}(U(m))})\}$
  avec $\mathcal{C}(\boxed{}) \stackrel{\text{def}}{=} \forall \omega \in \boxed{}, |\omega| \leq 42$

Q6. Parmi les ensembles précédents, lesquels sont indécidables ?

Indication : +0.25 par bonne réponse, -0.25 par mauvaise réponse.

L_a, L_b, L_d, L_f sont indécidables d'après le théorème de Rice

Q7. Que peut-on dire des deux autres ? **Justifiez votre réponse.**

SOLUTION

- *L_c est un ensemble de Rice mais la condition $\mathcal{C}$ est triviale. L'ensemble est décidable, c'est $\mathcal{M}$, l'ensemble des codages binaires de machines de Turing qui est définissable par une expression régulière, donc par un automate (à nombre) d'états fini, donc décidable par une machine de Turing.*
- *L_e n'est pas un ensemble de Rice car la condition porte sur la longueur de l'exécution de $U(m)$ et non sur le langage reconnu. Le théorème ne s'applique pas et ne permet pas de savoir si l'ensemble est décidable ou non.*

Exercice 3 : Réalisation de la machine de Turing universelle

Préambule Pour simplifier la réalisation de la MT U, on commence par l'implanter sous la forme d'une machine à deux bandes.
On considère que m représente la liste des transitions d'une MT M. L'exécution de $U(m)(\omega)$ doit simuler l'exécution de M sur le mot ω.

- **La bande B_1 contiendra la liste des transitions de M,** les unes à la suite des autres, sans séparateur. Une transition $\mathbf{q} \xrightarrow{\ell/e:d} \mathbf{q'}$ où $[\mathbf{q}]_2 = b_1 \dots b_n$ et $[\mathbf{q'}]_2 = b'_1 \dots b'_n$ sont les représentations binaires sur n bits de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q'}$ sera notée

(	b_1	...	b_n	)	ℓ	e	d	(	b'_1	...	b'_n	)

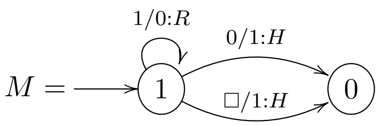
— **La bande B_2 contiendra la configuration courante de l'exécution de M**

$B_2 =$

$^\infty\Box$	ω_1	(	$[\mathbf{q}]_2$	)	ℓ	ω_2	$\Box^\infty$

où ω_1 représente la partie du ruban de M située à gauche de la tête de M, ω_2 représente la partie du ruban située à droite de la tête de M. La tête (simulée) de M est donc située sur le symbole ℓ. L'état courant ($\mathbf{q}$) de la MT M est inscrit en représentation binaire, entre w_1 et ℓ et entre parenthèses ; on ne se préocupe pas pour l'instant du statut ◎, ⊗, ◯ de l'état.

Q8. Donnez la bande B_1 correspondant à la liste des transitions de la MT ci-après.



SOLUTION

$^\infty\Box$	(	1	)	1	0	R	(	1	)	(	1	)	0	1	H	(	0	)	(	1	)	$\Box$	1	H	(	0	)	$\Box^\infty$

Q9. Donnez la bande B_2 correspondant à la configuration de départ de l'exécution de la machine M sur le mot binaire 101.

SOLUTION

$B_2 =$

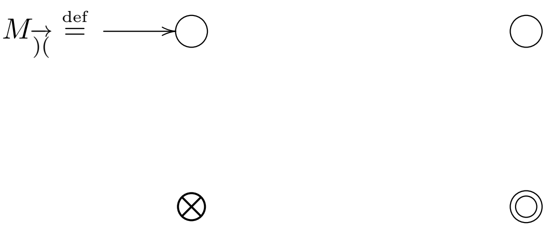
$^\infty\Box$	(	1	)	1	0	1	$\Box^\infty$

Q10. Donnez les configurations successives de B_2 par lesquelles passe l'exécution de M sur le mot binaire 101.

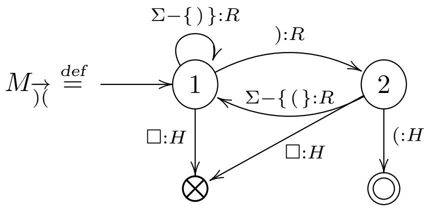
SOLUTION

B_2	$=$	$^\infty\Box$	(	1	)	1	0	1	$\Box^\infty$
B_2	$=$	$^\infty\Box$	0	(	1	)	0	1	$\Box^\infty$
B_2	$=$	$^\infty\Box$	0	(	2	)	1	1	$\Box^\infty$

Q11. Dessinez une MT $M_{\overrightarrow{)(}}$ à une bande qui recherche vers la droite la séquence «)(» et se place sur la parenthèse ouvrante.



SOLUTION



Q12. Donnez une transition de MT à deux bandes qui détecte si les têtes de lecture de la bande B_1 et de la bande B_2 pointent **sur des symboles différents de l'ensemble Σ puis effectue le même déplacement d des deux têtes**. Dans la suite on notera $\xrightarrow{\overset{\Sigma}{\neq}:d}$ ce type de transition.

SOLUTION

$$(\mathbf{q}) \xrightarrow{\overset{\Sigma}{\neq}:d} (\mathbf{q'}) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \left[(\mathbf{q}) \xrightarrow[B_2:\ell_2:d]{B_1:\ell_1:d} (\mathbf{q'}) \right] \middle| \ \ell_1, \ell_2 \in \Sigma, \ell_1 \neq \ell_2 \ \right\}$$

Q13. Donnez une transition de MT à deux bandes qui détecte si les têtes de lecture de la bande B_1 et de la bande B_2 pointent **sur un même symbole de l'ensemble Σ puis effectue le même déplacement d des deux têtes**. Dans la suite on notera $\xrightarrow{\overset{\Sigma}{=}:d}$ ce type de transition.

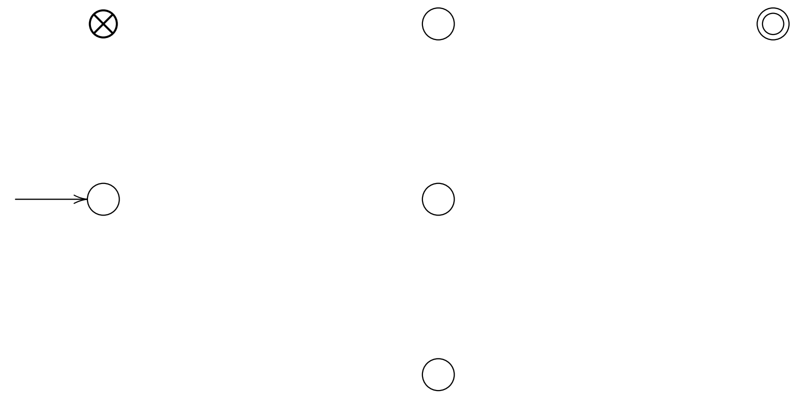
SOLUTION

$$(\mathbf{q}) \xrightarrow{\overset{\Sigma}{=}:d} (\mathbf{q'}) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \left[(\mathbf{q}) \xrightarrow[B_2:\ell:d]{B_1:\ell:d} (\mathbf{q'}) \right] \middle| \ \ell \in \Sigma \ \right\}$$

Q14. Dessinez une MT M_{trans} à 2 bandes qui recherche sur la bande B_1 la transition applicable à la configuration courante inscrite sur B_2. On suppose que la machine $M_{trans}(B_1)(B_2)$ est toujours appelée avec la tête de B_1 positionnée sur le symbole « (» de la première transition et celle de B_2 positionnée sur le symbole « (» de la configuration. La machine M_{trans} termine en ◎ si elle trouve une transition applicable et en ⊗ sinon.

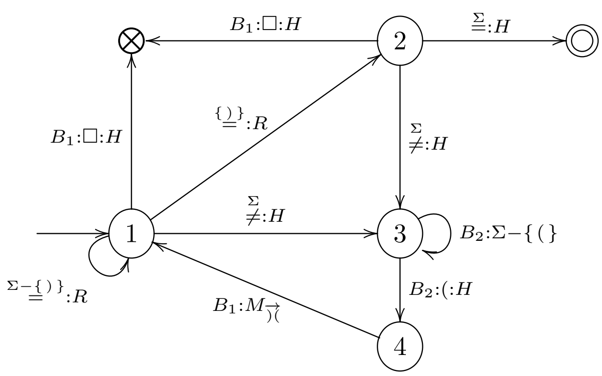
Indication : Vous pouvez utiliser les notations définies dans les deux questions précédentes.

$M_{trans} \overset{\text{def}}{=}$



SOLUTION

$M_{trans} \overset{\text{def}}{=}$



Exercice 4 : Un résultat fondamental

Le but de cet exercice est de démontrer la proposition suivante

Proposition 1 *Un langage L est décidable* $\overset{(i)}{\Longleftarrow}\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ *le langage L et son complémentaire $\overline{L}$ sont reconnaissables.*

Q15. Commençons par rappeler les définitions

- un langage L est reconnaissable s'il existe une MT M_1 telle que $M_1(\omega) \to \circledcirc \Leftrightarrow \omega \in L$
- un langage L est décidable s'il existe une MT M qui termine pour toute entrée et telle que $M(\omega) \to \circledcirc \iff \omega \in L$ et $M(\omega) \to \otimes \iff \omega \in \overline{L}$

  Indication : On notera M la machine de Turing qui décide L, M_1 celle qui reconnaît L et M_2 celle qui reconnaît $\overline{L}$

Q16. Complétez : L'implication ($\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$) est facile à montrer. Il suffit d'appliquer les définitions. Soit M la MT qui décide le langage L. On doit montrer

- qu'il existe M_1 qui reconnaît le langage L et
- qu'il existe M_2 qui reconnaît le langage $\overline{L}$.

On choisit de prendre

$$M_1(\omega) \overset{\text{def}}{=} M(\omega)$$

$$M_2(\omega) \overset{\text{def}}{=} [\text{if } (M(\omega) = \mathbb{E}\mathbb{r}\mathbb{r}) \text{ then return } \mathbb{A}\mathbb{c}\mathbb{c} \text{ else return } \mathbb{E}\mathbb{r}\mathbb{r}$$
$$\textit{ou bien } \text{if } (M(\omega) = \mathbb{E}\mathbb{r}\mathbb{r}) \text{ then } \to \circledcirc \text{ else } \to \otimes]$$

Q17. Complétez : Démontrons l'implication ($\overset{(i)}{\Longleftarrow}$). On suppose que L est reconnaissable par une MT M_1 et $\overline{L}$ est reconnaissable par une MT M_2 . On doit montrer que L est décidable, c'est-à-dire qu'on doit construire à l'aide de M_1 et M_2, une MT M qui accepte les mots de L et rejette les mots du langage $\overline{L}$.

Q18. Expliquez comment construire M qui décide L ?

SOLUTION

On constuit la MT M de la manière suivante : $M(\omega)$ copie le mot ω sur deux bandes B_1 et B_2 puis effectue alternativement une transition de M_1 sur B_1 et une transition de M_2 sur B_2 jusqu'à ce que l'une des deux machines s'arrêtent.

- *Si M_1 s'arrête dans l'état $\circledcirc$ alors $\omega \in \mathscr{L}(M_1) = L$ donc on fait passer M dans un état $\circledcirc$;*
- *Si M_2 s'arrête dans l'état $\circledcirc$ alors $\omega \in \mathscr{L}(M_2) = \overline{L}$ et on fait passer M dans un état $\otimes$.*
- *Forcément $\omega \in L$ ou $\omega \in \overline{L}$ donc l'une des deux machines M_1 ou M_2 va forcément s'arrêter et donner une réponse, donc M terminera pour tout entrée.*

Exercice 5 : Indécidabilité directe & Réduction

Le but de cet exercice est de refaire une preuve du cours en deux temps : on montre tout d'abord qu'un langage L_{ad} est non-reconnaissable ; pour ensuite en déduire, par réduction, que le langage L_{uc} est lui-aussi non-reconnaissable. La preuve est une variante moins directe mais plus simple que celle du cours.

On considère le langage L_{ad}, dit « anti-diagonale », et le langage L_{uc} définis par

$$\begin{aligned} L_{ad} &= \{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(m) \not\to \circledcirc\} \\ L_{uc} &= \{(m,\omega) \in \mathcal{M} \times \{0,1\}^* \mid U(m,w) \not\to \circledcirc\} \end{aligned}$$

Q19. Décrire L_{ad} par une phrase en français.

SOLUTION

L_{ad} est l'ensemble des codages binaires de MT qui n'acceptent pas, en tant que mot, leur propre codage binaire.

Q20. Décrire L_{uc} par une phrase en français.

SOLUTION

L_{uc} est l'ensemble des couples (m,ω) constitué du codage binaire d'une MT et d'un mot binaire, tels que la machine m n'accepte pas le mot ω.

Le langage anti-diagonale n'est pas reconnaissable

Q21. Complétez la preuve que L_{ad} est non-reconnaissable.

Preuve par contradiction SUPPOSONS QU' il existe une MT M_{ad} qui reconnait L_{ad}, cela signifie que

$$\mathscr{L}(M_{ad}) = L_{ad} \quad \text{et} \quad m \in L_{ad} \Longleftrightarrow M_{ad}(m) \to \circledcirc$$

Exhibons la contradiction : Considérons maintenant m_{ad}, le codage binaire de M_{ad} et demandons-nous si m_{ad} appartient à $\mathscr{L}(M_{ad})$? On peut répondre de deux manières à la question $\boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})}$?

(i) par définition du langage reconnu par une MT, on a l'équivalence

$$\boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})} \overset{(i)}{\Longleftrightarrow} M_{ad}(m_{ad}) \to \circledcirc$$

(ii) par définition du langage L_{ad}, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} \boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})} &\Longleftrightarrow m_{ad} \in \{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(m) \not\to \circledcirc\} \\ &\qquad \textit{puisque } \mathscr{L}(M_{ad}) = L_{ad} \\ &\Longleftrightarrow U(m_{ad})(m_{ad}) \not\to \circledcirc \\ &\overset{(ii)}{\Longleftrightarrow} M_{ad}(m_{ad}) \not\to \circledcirc \quad \textit{puisque } U(m_{ad}) = M_{ad} \end{aligned}$$

Finalement,

$$M_{ad}(m_{ad}) \to \circledcirc \overset{(i)}{\Longleftrightarrow} \boxed{m_{ad} \in \mathscr{L}(M_{ad})} \overset{(ii)}{\Longleftrightarrow} M_{ad}(m_{ad}) \not\to \circledcirc$$

Les équivalences (i) et (ii) aboutissent à une CONTRADICTION puisque l'exécution de $M_{ad}(m_{ad})$ est censée terminer dans l'état $\circledcirc$ d'après (i) et ne pas terminer dans l'état $\circledcirc$ d'après (ii).

Conclusion : En supposant qu'il existe une MT qui reconnaît L_{ad} on aboutit à une contradiction ; donc L_{ad} n'est pas reconnaissable. □

Réduction de L_{ad} à L_{uc}

Q22. Complétez les pointillés : Considérons le diagramme de réduction de L_{ad} à L_{uc}

$$
\begin{array}{rcl}
m \in \mathcal{M} & \xrightarrow[\text{traduction}]{M_R} & R(m) \in \mathcal{M} \times \{0,1\}^* \\
m \in L_{ad} & \underset{(\ddagger)}{\Longleftrightarrow} & R(m) \in L_{uc} \\
L_{ad} \text{ reconnaissable} & \Longleftarrow & L_{uc} \text{ reconnaissable} \\
L_{ad} \text{ non-reconnaissable} & \Longrightarrow & L_{uc} \text{ non-reconnaissable} \\
L_{ad} \text{ indécidable} & \Longrightarrow & L_{uc} \text{ indécidable} \\
L_{ad} \text{ décidable} & \Longleftarrow & L_{uc} \text{ décidable}
\end{array}
$$

Q23. Complétez : Pour déduire que L_{uc} est non-reconnaissable on peut exploiter le diagramme précédent à condition

1. de donner une MT M_R qui construit un couple de $\mathcal{M} \times \{0,1\}^*$ à partir d'un codage binaire de machine m
2. de prouver que l'exécution de $M_R(m)$ termine pour toute entrée m
3. de prouver l'équivalence (‡)

Q24. On a vu en cours que $U(m)(\omega) = U(m,\omega)$ mais il y a une subtile différence entre $U(m)(\omega)$ et $U(m,\omega)$, laquelle ? Détaillez votre réponse.

SOLUTION

$U(m,\omega)$ est la version à une seule bande de la machine universelle appliquée à un couple. Tandis que $U(m)(\omega)$ est la version à deux bandes de la machine universelle appliquée à B_1 contenant m et B_2 contenant ω. Puisque les deux versions à une bande et deux bandes sont équivalentes, le résultat sera le même.

Q25. Complétez : L'équivalence (‡) est particulièrement simple à démontrer :

$$
\begin{array}{rcll}
m \in L_{ad} & \Longleftrightarrow & U(m)(m) \not\to \circledcirc & \text{par définition de } L_{ad} \\
& \Longleftrightarrow & U(m,m) \not\to \circledcirc & \text{d'après } \textbf{Q24} \\
& \Longleftrightarrow & (m,m) \in L_{uc} & \text{par définition de } L_{uc} \\
& \Longleftrightarrow & R(m) \in L_{uc} & \text{par définition de } R \\
m \in L_{ad} & \overset{(\ddagger)}{\Longleftrightarrow} & R(m) \in L_{uc} & \text{est donc démontrée}
\end{array}
$$

Q26. Complétez La question précédente suggère de prendre $R(m) \overset{\text{def}}{=} (m,m)$.
La MT $M_R(m)$ se contente donc de dupliquer le mot m inscrit sur la bande pour en faire un couple.