Numéro d'anonymat : ....

MCAL MT – Examen

Durée : 1h30, sans document

- N'oubliez pas d'indiquer votre numéro d'anonymat sur le sujet puis glissez le dans votre copie à la fin de l'épreuve.
- Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles.
- Respectez les notations du cours.
- Le sujet est sur $(10100)_2$ points et comporte $(101)_2$ exercices indépendants.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres qui ne communiquent pas.

Exercice 1 : Résultats du cours (5min, 2 pt)

Rappelez en quelques lignes un résutlat important du cours pour chacun des thèmes ci-dessous

1. Calculabilité
2. Ensemble dénombrable / Ensemble non-dénombrable

Exercice 2 : Preuve d'indécidabilité associée à une réduction (5min, 2.5 pt)

Considérons un langage L sur l'alphabet Σ et un langage L' sur l'alphabet Σ' accompagnés d'un diagramme de réduction de L à L' qui satisfait l'équivalence (‡) :

$$\begin{array}{ccc} \omega \in \Sigma^* & \xrightarrow[traduction]{M_R} & R(\omega) = \omega' \in \Sigma'^* \\ \omega \in L & \underset{(\ddagger)}{\iff} & R(\omega) \in L' \end{array}$$

On souhaite démontrer que « L non-reconnaissable $\implies$ L' non-reconnaissable. »

Q1. Complétez la preuve (2 pt) *Pour démontrer l'implication on suppo* .... *et on doit montrer que* .... *e* ....

Preuve par contradiction: *Faisons l'hy* .... *e*
.... » *et utilisons* .... *pour construire une* MT M *qui* ....
. *On aura alors une* .... *puisque* .... *e*

L'hy M' *reconnaît* L' » *signifie* $M'(\omega') =$ ...... $\underset{(1)}{\iff}$ ....

Prenons $M \overset{def}{=}$ [........... ; ....]. *On doit montrer que* M .... L *ce qui revient à montrer que* .... $\iff$ .... *Pour cela il suffit de compléter le diagramme d'équivalence suivant :*

.... $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ ....

$\Updownarrow$ def M $\qquad\qquad$ $\Uparrow$ d'après .... $\Downarrow$

$$\overbrace{\omega \xrightarrow{\ \ldots\ldots\ldots\ \ } \underbrace{R(\omega) \xrightarrow{\ \ldots\ldots\ \ } \ldots\ldots}_{M'(R(\omega))=\ldots\ldots}}$$

.... $R(\omega) \in$ ......

Conclusion : en suppo .... reconnaissable on aboutit à .... reconnaissable ce qui contredit l'hy .... non-reconnaissable. On obtient donc une contradiction ce qui prouve que .... e □

Exercice 3 : Applications du Théorème de Rice (25min, 6 pt)

Q2. (0.5 pt) **Complétez :** Un mot ω appartient au langage d'une MT M si .... c'est-à-dire .... $\rightarrow$ ...... À l'inverse, ω n'appartient pas au langage d'une MT M si .... $\rightarrow$ .... *ou* .... $\rightarrow$ .....

Q3. (0.25 pt) **Complétez :** Deux MT M_1 et M_2 sont équivalentes si et seulement si ....

Q4. (0.25 pt) **Complétez :** Un ensemble de .... est un ensemble de Rice s'il s'écrit $\{m \mid \mathcal{C}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\}$ où $\mathcal{C}$ est .... portant sur .... m

Q5. (0.25 pt) **Complétez :** Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des codages binaires des machines de Turing. Tout ensemble de Rice non-.............. c'est-à-dire différent de ...... et de .. , est ....

Q6. (0.25 pt) Si un ensemble L n'est pas un ensemble de Rice, que peut-on en déduire ?

Q7. (1.25 pt) **Formalisez en termes mathématiques les ensemble suivants**

1. L'ensemble des machines de Turing équivalentes à la MT M
   $L_1 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
2. L'ensemble des machines de Turing qui ne terminent pas pour le mot 00
   $L_2 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
3. L'ensemble des MT qui terminent dans l'état $\otimes$ sur le mot binaire 00
   $L_3 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
4. l'ensemble des MT qui n'acceptent pas le mot binaire 00
   $L_4 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
5. L'ensemble des machines de Turing qui n'acceptent aucun mot
   $L_5 = \{m \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
6. L'ensemble des machines de Turing qui reconnaissent un nombre pair de mots
   $L_6 = \{m \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Parmi les ensembles L_1 à L_6, 4 sont des ensembles de Rice, 2 n'en sont pas.

Q8. (2 pt) Pour justifier les 4 ensembles de Rice, vous rédigerez votre réponse de la manière suivante en définissant la condition de Rice, $\mathcal{C}$, correspondant à l'ensemble.

Indication : ... est un ensemble de Rice car il peut s'écrire $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ )\}$ avec $\mathcal{C}(L) \overset{def}{=} \ldots$

Q9. (1 pt) Expliquez pourquoi les 2 autres ensembles ne sont pas des ensemble de Rice.

Exercice 4 : Puissance des modèles de calcul (30min, 5 pt)

Répondez aux questions suivantes par vrai/faux et **justifiez votre réponse. Une réponse vrai/faux sans justification ne donne pas de point.**

1. Il existe des ensembles qui sont reconnaissables par un programme C mais qui ne sont pas reconnaissables par une MT à une bande.
2. Soit $L = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un langage fini, il existe une automate (à nombre) d'états fini qui le reconnaît.
3. Soit L un langage fini, il existe une machine de Turing qui le reconnaît.
4. L'ensemble $\{0,1\}^*$ des mots binaires est reconnaissable par une machine de Turing.
5. L'ensemble $\mathcal{M}$ des codages binaires de machines de Turing est reconnaissable par une MT.
6. Soit L un langage infini, il n'existe pas de machine de Turing qui le reconnaît.
7. Soit L un langage infini, il existe forcément une machine de Turing qui le reconnaît.
8. Si une machine de Turing reconnaît un langage, alors elle reconnaît son complémentaire.
9. Il existe des algorithmes qu'on peut programmer avec une machine de Turing à deux bandes mais pas avec une machine de Turing à une seule bande.
10. Les machines de Turing à plusieurs bandes reconnaissent plus de langages que les machines de Turing à une bande.

Exercice 5 : Algorithme de substitution réalisé par une MT (25min, 4.5 pt)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\square, a, b, A\}$ **sans le symbole** \$ de début de bande. **La partie utile d'une bande** est la partie située entre l'infinité de $\square$ à gauche et l'infinité de $\square$ à droite. Au départ la tête de lecture/écriture est placée sur le premier symbole du mot. Une bande contenant le mot *abaaaba* sera donc de la forme $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} {}^{\infty}\square & a & b & a & a & a & b & a & \square^{\infty} \\ \hline & \uparrow & & & & & & & \end{array}$.

Q10. (0.75 pt) Donnez une MT $M_{\overleftarrow{début}}$ à une bande qui, à partir d'une position dans la partie utile de la bande, déplace la tête de lecture/écriture sur le début du mot c'est-à-dire sur le symbole non-$\square$ le plus à gauche de la bande. Elle termine dans un état $\circledcirc$ s'il existe et dans un état $\otimes$ si la bande est vide.

Q11. (0.75 pt) Donnez une MT $M_{prefix}(B_1, B_2)$ à deux bandes qui décide si le mot de B_2 est un préfixe du mot de B_1 (autrement dit le début du mot de B_1 correspond au mot de B_2). On suppose qu'au départ les têtes de lecture/écriture de B_1 et B_2 pointent sur le début de leur mot.

Exemples :

- La MT M_{prefix} doit répondre $\mathbb{V}$ dans le cas $\begin{array}{r|c|c|c|c} B_1 = & {}^{\infty}\square & \omega & \ldots & \square^{\infty} \\ \hline B_2 = & {}^{\infty}\square & \omega & \square & \square^{\infty} \end{array}$
- La MT M_{prefix} doit répondre $\mathbb{F}$ dans le cas $\begin{array}{r|c|c|c|c} B_1 = & {}^{\infty}\square & \omega' & \ldots & \square^{\infty} \\ \hline B_2 = & {}^{\infty}\square & \omega & \square & \square^{\infty} \end{array}$ si les mots ω et ω' ne sont pas identiques
- La MT M_{prefix} doit répondre $\mathbb{F}$ dans le cas $\begin{array}{r|c|c|c|c} B_1 = & {}^{\infty}\square & \omega & \square\ldots\square & \square^{\infty} \\ \hline B_2 = & {}^{\infty}\square & \omega & \omega' & \square^{\infty} \end{array}$

Q12. (0.75 pt) Donnez une MT $M_{\overrightarrow{copy}}(B_2, B_1)$ a deux bandes qui copie le contenu de B_2 sur B_1. On suppose qu'au départ les têtes de lecture/écriture de B_1 et B_2 pointent sur le début de leur mot.

Exemple :

		$\downarrow$										
$B_1 =$	$^\infty\square$	a	a	a	$\square^\infty$	$\xrightarrow{M_{\overrightarrow{copy}}}$	$B_1 =$	$^\infty\square$	b	b	$\square$	$\square^\infty$
$B_2 =$	$^\infty\square$	b	b	$\square$	$\square^\infty$		$B_2 =$	$^\infty\square$	b	b	$\square$	$\square^\infty$
		$\uparrow$										

Algorithme de substitution À l'aide de MT précédentes on souhaite concevoir une machine de Turing $M_{subst}(B_1, B_2, B_3, B_4)$ à 4 bandes qui remplace les occurences du mot de B_2 dans le mot B_1 par le mot de B_3. Au départ la bande B_4 est vierge, elle sert d'espace de travail et les têtes de lecture/écriture de chaque bande pointent sur le début de leur mot.

Exemples :

- $M_{subst}(abaaaba, aa, A, \epsilon) = (abAaba, aa, A, \epsilon)$
- $M_{subst}(abaaaba, aa, a, \epsilon) = (abaaba, aa, a, \epsilon)$

Pour illustrer l'algorithme vous prendrez l'exemple suivant

		$\downarrow$							
$B_1 =$	$^\infty\square$	a	b	a	a	b	a	$\square^\infty$	
$B_2 =$	$^\infty\square$	a	a	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square^\infty$	
$B_3 =$	$^\infty\square$	A	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square^\infty$	
$B_4 =$	$^\infty\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square^\infty$	
		$\uparrow$							

Q13. (2.25 pt) **Pour chaque étape de l'algorithme :**

— vous décrirez soigneusement, en français, ce qu'elle fait ;

— vous donnerez son effet sur les bandes B_1, B_2, B_3, B_4 de l'exemple ;

— vous donnerez le graphe des transitions de la MT correspondant à cette étape.

Indication : Respectez les conventions suivantes :

— Prenez soin de bien numéroter vos états (1),(2),(2𝕍),(2𝔽),(3), ... afin qu'on puisse recontruire le graphe en connectant les transistions.

— Une transition $\xrightarrow{(i)\ \ell/e{:}d}$ indique que l'action porte sur la bande B_i

— Une transition $\xrightarrow{M(B_i,B_j)}$ indique qu'on exécute la MT M sur les bandes B_i et B_j.