Exercice 1 : $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ non-dénombrable

Q1. Complétez On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e ....
de .... à un argument ...., c'e
.... associent un .... : $\mathbb{N} \to \mathbb{B} = \{P \mid$ ....$\}$.
Considérons un .... P de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$. Il e .... par un tableau $[0...\mathbb{N}[$ qui indique pour chaque entier i la valeur .... $P(i)$ associée.

Q2. Donnez quatre éléments de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

Q3. Rangez vos 4 éléments dans un tableau de booléens à deux dimensions $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$; **donnez** les 4 premières lignes, 6 premières colonnes du tableau.

Q4. Complétez la preuve On montre que $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e
preuve par .... :

S.................................. que l'ensemble $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ soit dénombrable c'e ....
avec $\mathbb{N}$. Alors il existe une .... entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui, à un entier ℓ, ... le prédicat P_ℓ. On peut alors ranger .... le dans un tableau $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$ à la manière de George .... en plaçant sur la .... ℓ le .... du prédicat .... On peut donc re un élément de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ par son .... de ligne : la ligne ℓ définit le prédicat P_ℓ.

Considérons la .... du tableau et exhibons une contradiction : Puisque le tableau contient .... prédicat $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ défini par $P(i) \stackrel{def}{=}$ .... doit .... tableau à une certaine ligne, disons ℓ, donc P................

Exemple : Le prédicat P correspond à la .... de la .... du tableau. Dans le cas du tableau de la question précédente, le prédicat P serait

$$P(0) = \ldots.,\ P(1) = \ldots,\ P(2) = \ldots.,\ P(3) = \ldots., etc$$

Évaluons P au point ℓ :

$P(\ell) =$ .... puisque ....; mais, par ailleurs,
$P(\ell) =$ .... par .... : Contradiction.

Conclusion : En suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ...., on aboutit à ...., donc $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ....

Exercice 2 : Génération de graphes en Gamma

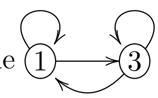
Q5. Exécutez le programme Gamma Γ_1 ci-dessous sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(0,7)\}\!\!\}$ où $\div$ est la division entière, c'est-à-dire $5 \div 2 = 2$.

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \textsc{Itv}(x,y) \xrightarrow{x \leq y+1} \textsc{Itv}(x,\ (x+y)\div 2),\quad \textsc{Itv}(1+(x+y)\div 2,\ y) \\ \textsc{Itv}(x,x) \xrightarrow{\quad\quad} \mathrm{N}(x) \end{cases}$$

Q6. **(a)** Combien d'applications de règles sont nécessaires avant d'arriver à la stabilité du multi-ensemble ? **(b)** En combien d'étapes [1] atteint-on la stabilité ?

Q7. Généralisation **(a)** Expliquez l'effet du programme Γ_1 sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(0,n-1)\}\!\!\}$ où n est un entier > 1. **(b)** En combien d'applications de règles et combien d'étapes obtient-on la stabilité ?

Représentation d'un graphe par un multi-ensemble On peut décrire un graphe par l'ensemble de ses arcs. On notera $\textsc{Arc}(i,j)$ un arc entre le nœud i et le nœud j.

Q8. **(a)** Donnez le multi-ensemble correspondant au graphe  et **(b)** dessinez le graphe correspondant au multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Arc}(1,1), \textsc{Arc}(2,3)\}\!\!\}$

Q9. On considère un multi-ensemble $\mathcal{M}$ qui contient des nœuds $\mathrm{N}(i)$ numérotés de 0 à $n-1$. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}$ et de l'atome $G(p) \in \mathcal{M}$ – construit un graphe à *exactement* p arcs *différents* entre des nœuds de $\mathcal{M}$.

> **Indication :** L'atome $G(..)$ de $\mathcal{M}$ qui sert à contrôler l'arrêt de la réaction.

Q10. Notre but est d'adapter le programme précédent pour garantir qu'on construit un **graphe connexe** c'est-à-dire un graphe qui ne contient pas de sous-graphes disjoints [2]. Cette fois on commence avec un atome $G'(p)$ dans un multi-ensemble $\mathcal{M}'$ de nœuds primés, notés $\mathrm{N}'(i)$ pour indiquer qu'il ne font pas partie du graphe connexe. L'idée est de changer un noeud $\mathrm{N}'(i)$ en $\mathrm{N}(i)$ lorsqu'il se trouve connecté au graphe. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}'$ et de l'atome $G'(p)$ – construit un *graphe connexe* à exactement p arcs différents entre des nœuds de $\mathcal{M}'$.

Exercice 3 : Machines de Turing à 3.. 2.. 1 bande(s)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\square, \$, 0, 1, \S\}$. Le symbole § servira de marqueur. On s'intéresse à l'opération $S : \{0,1\}^* \to 0^*1^*$ qui prend en paramètre un mot binaire $\omega \in \{0,1\}^*$ et range tous les 0 du mot avant les 1.

> **Exemple :** $S(111000) = 000111$ et $S(01010) = 00011$ et $S(\epsilon) = \epsilon$

Le but de cet exercice est de réaliser l'opération S de trois façons : avec une MT à 3 bandes (B_1, B_2, B_3), puis à 2 bandes (B_1, B_2), puis à une seule bande (B_1). Au départ le mot ω est inscrit sur la bande B_1 ; les autres bandes contiennent juste un \$; la tête de lecture/écriture de chaque bande est positionnée sur le \$. À la fin de l'exécution, la bande B_1 doit contenir le mot $S(\omega)$.

> **Indication :** On indiquera devant l'action $\ell/e : d$ le numéro de la bande concernée. Les transitions qui ont des actions simultanées sur plusieurs bandes seront notées : $q \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ \ (2)\ell_2/e_2:d_2\ \ (3)\ell_3/e_3:d_3} q'$.
>
> Si une transition n'a pas d'action sur la bande B_2, on ne décrit pas d'action $(2)\ldots$, on se contentera d'indiquer les actions sur B_1 et B_3 : $q \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ \ (3)\ell_3/e_3:d_3} q'$.

1. une étape = une application en parallèle des règles
2. Un nœud $\mathrm{N}(i)$ sans arc ne constitue pas un graphe.

Q11. Donnez une MT $M_{\overrightarrow{\S}}$ qui recherche le symbole § vers la droite et ramène la tête de lecture/écriture de B_1 sur le §.

Q12. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec une MT M_3 à 3 bandes (B_1, B_2, B_3) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_3(01010)$.

Q13. Donnez les transitions de la MT M_3 à trois bandes qui réalise S.

Q14. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_2 à 2 bandes (B_1, B_2) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_2(01010)$.

Q15. Donnez les transitions de la MT M_2 à deux bandes qui réalise S.

Q16. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_1 à une bande (B_1) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_1(01010)$.

Q17. Donnez les transitions de la MT M_1 à une bande qui réalise S.

Exercice 4 : Codage des automates (à nombre) d'états fini en machines de Turing

L'objectif de l'exercice est de simuler un automate (à nombre) d'états fini (AEF) par une machine de Turing à une bande. Le mot ω à reconnaître sera inscrit sur la bande.

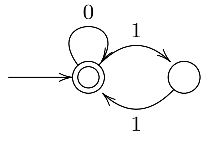
Q18. Rappelez la définition de **l'acceptation** d'un mot ω par un AEF. Autrement dit, donnez les conditions à satisfaire pour qu'un mot ω soit accepté par un AEF.

Des exemples d'automates (à nombre) d'états fini. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ pour les automates (à nombre) d'états fini et $\Sigma' = \{\square, \$, 0, 1\}$ pour les machines de Turing.

Q19. On considère le langage L_1 constitué des mots binaires formés d'un nombre quelconque de 0 (éventuellement aucun) et terminés par un 1. Donnez trois mots binaires qui appartiennent au langage L_1 et trois mots binaires qui n'appartiennent pas à L_1.

Q20. Donnez un AEF A_1 qui reconnaît le langage L_1.

Q21. Décrivez en français le langage reconnu par l'AEF $A_2 =$



Q22. Donnez la traduction en MT d'une transition $q \xrightarrow{\ell} q'$ d'un AEF A.

Q23. Donnez les transitions de MT qui traduisent **(a)** l'effet d'un état accepteur q de l'AEF, et **(b)** l'effet d'un état non-accepteur q de l'AEF.

Q24. Donnez la MT M_2 équivalente à l'AEF A_2, c'est-à-dire qu'elle reconnaît le langage L_2.

Q25. Donnez la MT M_1 équivalente à l'AEF A_1, c'est-à-dire qu'elle reconnaît le langage L_1.