

Pour chacun des exercices suivants, il s'agit de démontrer une proposition logique en déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve. Attention à la portée des hypothèses.

Exercice 1

Socrate est un homme et tous les hommes sont mortels, donc Socrate est mortel.

$$[H(a) \wedge (\forall x H(x) \Rightarrow M(x))] \Rightarrow M(a)$$

Remarque : essayer également $H(a) \Rightarrow (\forall x H(x) \Rightarrow M(x)) \Rightarrow M(a)$ (l'arbre de preuve est plus simple).

Exercice 2

$$[(\forall x F(x)) \wedge (\forall y F(y) \Rightarrow G(y))] \Rightarrow \forall z G(z)$$

Remarque : comparer avec $(\forall x F(x)) \Rightarrow (\forall y F(y) \Rightarrow G(y)) \Rightarrow \forall z G(z)$

Exercice 3

$$[\forall x \forall y F(x) \vee (G(y) \Rightarrow F(x))] \Rightarrow \forall x G(x) \Rightarrow F(x)$$

Exercice 4

$$(\forall x \forall y R(x, y)) \Rightarrow (\forall y \forall x R(x, y))$$

Exercice 5

$$G(x_0) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y)) \Rightarrow (F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow G(x))$$

Exercice 6

$$[(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))] \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

Exercice 7

$$[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))] \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Exercice 8

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow [(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))]$$

Exercice 9

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow [(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))]$$

Exercice 10

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow [(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))]$$

Exercice 11

$$[(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))] \Rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

Exercice 12

$$[\exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y))] \Rightarrow [\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))]$$

Exercice 13

$$[(\exists x P(x)) \wedge (\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)))] \Rightarrow [\exists z Q(z)]$$

Exercice 14

$$[(\forall x \exists y P(x, y)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow G(x, z)))] \Rightarrow [\forall x \exists y (G(x, y))]$$