

Démontrer la proposition logique en énoncé en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle.

Exercice 1

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Exercice 2

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Exercice 3

$$(\neg A \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

Exercice 4

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Exercice 5

$$\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

Exercice 6

$$\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Les exercices suivants sont plus difficiles : on demande dans un premier temps de ne pas utiliser le tiers-exclu ni l'élimination de la double négation, sauf indication contraire.

Exercice 7

$$([A \Rightarrow (A \vee \perp)] \Rightarrow (\perp \vee A)) \Rightarrow A$$

Les exercices suivants comportent deux énoncés. L'élimination de la double négation n'est autorisée que dans le second. Démontrer également ce second résultat en utilisant le tiers exclu.

Exercice 8

$$1) (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee B)$$

$$2) (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$$

Exercice 9

$$1) (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg(B \Rightarrow A)$$

$$2) (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Exercice 10

$$1) \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$2) \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

Quelques phénomènes curieux : étudier les théorèmes suivants, en utilisant l'élimination de la double négation à bon escient.

Exercice 11

$$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$$

Exercice 12

$$[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee C]$$

Exercice 13

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow P \vee Q) \Leftrightarrow (A \Rightarrow P) \vee (B \Rightarrow Q)$$

Variante : démontrer sans tiers exclu ni passage à la double négation

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow (P \Rightarrow X) \vee (Q \Rightarrow X)) \Rightarrow ((A \Rightarrow P \Rightarrow X) \vee (B \Rightarrow Q \Rightarrow X)) \Rightarrow X \Rightarrow X$$