

Pour les exercices suivants, démontrer la proposition logique en énoncé en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle. Prendre particulièrement soin de la gestion des hypothèses : pour chaque sous-arbre, distinguer les hypothèses disponibles des hypothèses levées.

Avant d'écrire l'arbre de preuve, il est recommandé de reformuler en français la proposition logique en énoncé. Cela n'est pas toujours commode (lorsqu'il y a des combinaisons complexes de \Rightarrow) mais convient bien pour nombre d'exercices, notamment 2, 3, 4, et 12 à 16.

Au cours de la rédaction de l'arbre de preuve, formuler également en français les étapes de preuve. On peut aussi le faire complètement avant de commencer l'arbre, ou lorsqu'il est terminé pour récapituler.

Exercice 1

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$$

Rappelons qu'il faut la lire ainsi : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

Exercice 2

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

Exercice 3

$$A \wedge B \Rightarrow A; \quad B \wedge A \Rightarrow A; \quad A \wedge A \Rightarrow A$$

Exercice 4

$$((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C)); \quad (A \wedge (B \wedge C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

Exercice 5

$$((A \wedge B) \Rightarrow A \Rightarrow D) \Rightarrow (C \wedge A \wedge C \Rightarrow B \Rightarrow D)$$

Remarque : par convention, $P \wedge Q \wedge R$ se lit $(P \wedge Q) \wedge R$.

Question subsidiaire : trouver un arbre de preuve sans répétition.

Exercice 6

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

Exercice 7

$$(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$$

Exercice 8

$$(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$$

Exercice 9

$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

Exercice 10

$$B \wedge (A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \vee C$$

Exercice 11

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$$

Exercice 12

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

Exercice 13

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$$

Exercice 14

$$(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Exercice 15

$$(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Exercice 16

$$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$$

Lorsqu'on a trouvé un arbre de preuve, c'est le bonheur : la formule en conclusion est démontrée. Mais lorsqu'on n'en a pas trouvé ? Serait-ce parce que l'on n'a pas cherché suffisamment ? Ou parce que, réellement, aucun arbre de preuve n'est possible ? La question est plus compliquée qu'il n'y paraît car il faudrait a priori considérer tous les arbres de preuve possibles et il y en a une infinité.

Cependant une technique fonctionne dans la plupart des cas, celle des *contre-exemples*. En bref, si en assignant une valeur de vérité bien choisie à chaque atome d'une formule, puis en calculant sa valeur de vérité par les tables de vérité, on obtient « faux », alors il n'existe aucun arbre de preuve pour celle-ci.

Attention : si on obtient « vrai », cela ne donne pas un arbre de preuve. Pour avoir une chance il faudrait au minimum obtenir « vrai » dans toutes les assignations, mais même ainsi on n'aurait pas encore d'arbre de preuve sous les yeux.

Pour chacun des exercices suivants, il s'agit de trouver un « contre-exemple » à la proposition donnée en énoncé.

Exercice 17

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$$

Exercice 18

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

Pour les exercices suivants, trouver un arbre de preuve ou un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé.

Exercice 19

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

Exercice 20

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee B)$$

Exercice 21

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$$