INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 11

Arithmétique et récurrence

Plan du chapitre 1

Récurrence forte

Récurrence structurelle
- Définition
- Exemple : bégaiement et longueur
- Exemple : nombre de feuilles et de clés

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n ... considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\frac{\forall n\ [\forall m\,,\ m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-recG}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :
- par exemple pour déduire $P(n)$ avec $n = 3$,
  on peut utiliser non seulement $P(2)$, mais aussi $P(1)$ et $P(0)$
- le travail est le même pour $n = 0$: $m < 0$ est absurde

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

n - 1
Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-cas}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n,\ n = 0\ \lor\ \exists x,\ n = S(x)$
- $0 = 0\ \lor\ \exists x,\ 0 = S(x)$
- $S(n) = 0\ \lor\ \exists x,\ S(n) = S(x)$

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :
$P(0)$ .... (1)
$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ .... (2)
Posons $Q(n) \overset{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,
et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ .... (3)
Raisonnement par cas :
- $Q(0) \Rightarrow P(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(0)$
- soit n quelconque et supposons $Q(S(n))$ .... (4)
  par définition de Q et sachant que $n < S(n)$, on obtient $P(n)$;
  avec (2), on obtient $P(S(n))$;
  on a donc $\forall n\,,\ Q(S(n)) \Rightarrow P(S(n))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte
cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)$ .... (1)
On pose $Q(n) \overset{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ .... (1')
Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ Q(n)$
- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $P(m)$; donc $\forall m,\ m < 0 \Rightarrow P(m)$, c-à-d. $Q(0)$
- soit n tel que $Q(n)$ .... (2)
  c-à-d. $\forall x,\ x < n \Rightarrow P(x)$ .... (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < S(n)$ .... (3)
  (3) entraîne $m < n \lor m = n$ .... (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $P(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $P(n)$, donc $P(m)$

  on a $P(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow P(m)$ c-à-d. $Q(S(n))$

On a donc par récurrence $Q(n)$ pour tout n, et donc $P(n)$ par (1')

Raisonnements par récurrence structurelle

Récurrence sur les listes

P est un prédicat arbitraire sur les listes

$$\boxed{\dfrac{P([\,]) \qquad \forall x\, \forall l\;\; P(l) \Rightarrow P(x::l)}{\forall l\;\; P(l)}}$$

Récurrence sur les arbres binaires

P est un prédicat arbitraire sur les arbres binaires

$$\boxed{\dfrac{P(F) \qquad \forall g\, \forall x\, \forall d\;\; P(g) \Rightarrow P(d) \Rightarrow P(N(g,x,d))}{\forall a\;\; P(a)}}$$

Rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ se lit $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Ceci se généralise à tous les types inductifs

Exemple : bégaiement et longueur

```
let rec begaie = function
  | [] → []
  | x :: l → x :: x :: begaie l
```

Conjecture : le bégaiement double la longueur

$\forall l\;\;$ longueur (begaie l) $= 2 \times$ longueur l

```
let rec longueur = function
  | [] → 0
  | x :: l → 1 + longueur l
```

On pose $P(l) \stackrel{\text{déf}}{=}$ longueur (begaie l) $= 2 \times$ longueur l

Montrons $\forall l\;\; P(l)$ par récurrence structurelle sur l

Cas de base

$$\mathcal{D}_0 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{longueur (begaie [ ])} \\ = & \quad \{\text{définition de begaie}\} \\ & \text{longueur ([ ])} \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 0 \\ = & \quad \{\text{arithmétique}\} \\ & 2 \times 0 \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 2 \times \text{longueur [ ]} \end{array} \right.$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\ = & \quad \{\text{définition de begaie}\} \\ & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{hypothèse de récurrence 1}\} \\ & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\ = & \quad \{\text{arithmétique}\} \\ & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0)) \end{array} \right.$$

Assemblage (préparation)

Case de base

$$\dfrac{\dfrac{}{\text{longueur (begaie [ ])} = 2 \times \text{(longueur [ ])}}\;\mathcal{D}_0}{P\,([\,])}$$

Pas de récurrence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P(l_0)}^{1}}{\text{hrec}}}{\text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) = 2 \times \text{longueur } (x_0 :: l_0)}\;\mathcal{D}_1}{P\,(x_0 :: l_0)}$$

Assemblage final

$$\dfrac{\dfrac{}{P\,([\,])}\;\mathcal{D}_0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P(l_0)}^{[1]}}{P\,(x_0 :: l_0)}\;\mathcal{D}_1}{P\,(l_0) \Rightarrow P\,(x_0 :: l_0))}\;\Rightarrow_{I}[1]}{\forall l\;\; P\,(l) \Rightarrow P\,(x_0 :: l)}\;\forall_I}{\forall x\;\; \forall l\;\; P\,(l) \Rightarrow P\,(x :: l)}\;\forall_I}{\forall l\;\; P(l)}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
  | F → 1
  | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
  | F → 0
  | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a\;\;$ nbf $a =$ nbc $a + 1$

On pose $P(a) \stackrel{\text{déf}}{=}$ nbf $a =$ nbc $a + 1$

Montrons $\forall a\;\; P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- nbf F $= 1 = 0 + 1 =$ nbc F $+ 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

  nbf $g_0 =$ nbc $g_0 + 1$ et nbf $d_0 =$ nbc $g_0 + 1$

  $$\begin{array}{rll} \text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) & = \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 & \\ & = (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) & \textit{(hyps réc)} \\ & = (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 & \\ & = (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1 & \end{array}$$