

# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,  
Grenoble I

2007



# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,  
Grenoble I

2007

## Cours 6



- └ Double négation, tiers exclu
- └ La double négation

## La double négation

A-t-on l'équivalence entre  $A$  et  $\neg\neg A$  ?

- ▶  $A \Rightarrow \neg\neg A$  (pas difficile)
- ▶ mais la réciproque  $\neg\neg A \Rightarrow A$  ne peut se démontrer avec les règles précédentes (cf. théorème fondamental d'élimination des coupures)

D'où :

Règle supplémentaire : élimination de  $\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg\neg E$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Utilisation de définitions et arbres de preuve

## Utilisation de définitions et arbres de preuve

$\neg A$  étant  $A \Rightarrow \perp$  par définition, (où  $A$  est une proposition quelconque) on peut remplacer à volonté  $\neg A$  par  $A \Rightarrow \perp$  et réciproquement

### Convention

On utilise une barre de fraction en pointillé

$$\frac{\dots \neg A \dots}{\neg A} \neg \text{déf}$$

$$\frac{\dots A \dots}{A \Rightarrow \perp} \neg \text{déf}$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Utilisation de définitions et arbres de preuve

## Exemples

### Exemple 1

$$\frac{(A \wedge B) \Rightarrow \perp}{\neg(A \wedge B)} \neg \text{déf}$$

### Exemple 2

$$\frac{A \wedge (B \Rightarrow \perp)}{A \wedge \neg B} \neg \text{déf}$$

### Exemple 3

$$\frac{A \vee \neg\neg B}{A \vee (\neg B \Rightarrow \perp)} \neg \text{déf}$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Raisonnement par l'absurde

## Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition  $A$  de manière indirecte, en *raisonnant par l'absurde* :

- ▶ supposer  $\neg A$
- ▶ en déduire l'absurde  $\perp$
- ▶ par  $\Rightarrow I$ , inférer  $(\neg A) \Rightarrow \perp$ , c-à-d.  $\neg\neg A$
- ▶ par  $\neg\neg E$  inférer  $A$

$$\frac{\frac{\neg A}{\vdots} \Rightarrow I [1]}{\dots \neg A \dots \Rightarrow \perp} \Rightarrow I [1] \quad \frac{\dots \neg A \dots \Rightarrow \perp}{A} \neg\neg E$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Raisonnement par l'absurde

## Utilisation du raisonnement par l'absurde

Exemples d'utilisation indispensable de  $\neg\neg E$

- ▶  $\neg\neg A \Rightarrow A$  (évidemment !)
- ▶  $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
- ▶  $\neg(\forall x P(x)) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Raisonnement par l'absurde

## Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- ▶ pour n'importe quelle proposition  $A$ , on a soit  $A$  soit sa négation  $\neg A$ .

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de *principe du tiers exclu*.

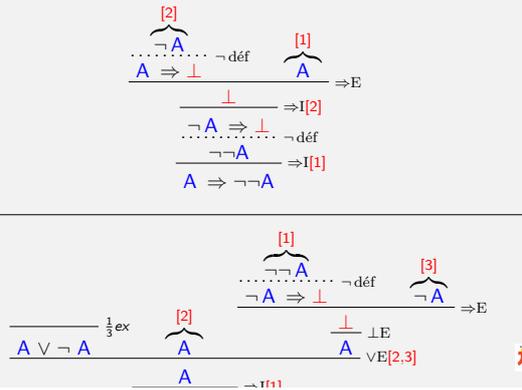
$$\frac{}{A \vee \neg A} \frac{1}{2} \text{ex}$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser  $\neg\neg E$  (théorème fondamental de réduction).

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

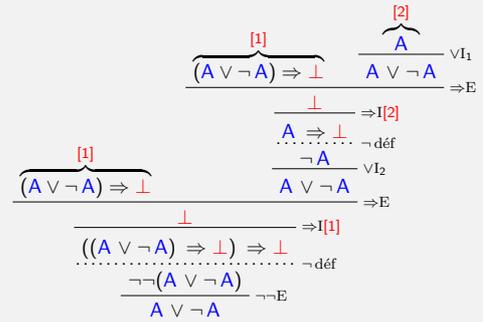


### Quelques arbres de preuve avec négation (1)



### Quelques arbres de preuve avec négation (2)

Dérivation du tiers exclu utilisant  $\neg\neg E$



### Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi  $A$  ou  $\neg A$  est vérifié. Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de  $\exists x P(x)$  on n'a pas le témoin de l'existence de  $x$ .

- ▶ démonstrations plus faciles avec  $\frac{1}{3}ex$  ou  $\neg\neg E$
- ▶ mais moins informatives

#### Définition

- ▶ la **logique classique** est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec  $\frac{1}{3}ex$  (ou  $\neg\neg E$ )
- ▶ la **logique intuitionniste** est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans  $\frac{1}{3}ex$  (ni  $\neg\neg E$ )

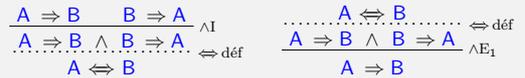
**Conséquence** : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations **constructives**, contrairement à la logique classique.

### L'équivalence

Définition :  $A \Leftrightarrow B \stackrel{\text{déf}}{=} A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :  $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A \Leftrightarrow A \Leftrightarrow B$  et  $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$

En général, on les utilise en combinaison avec  $\wedge I$ ,  $\wedge E_1$  et  $\wedge E_2$  :



et similairement pour  $B \Rightarrow A$  en utilisant  $\wedge E_2$ .

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

