

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007



INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 4



Formule existentielle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\exists x G(x)$	– il existe x , x est glissante – il existe une route glissante

\exists est le *quantificateur existentiel*

Dans $\exists x G(x)$, la variable x est *quantifiée existentiellement*

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\exists x G(x) \Rightarrow D(x)$	$\exists x [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\exists x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\exists x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\exists x G(x) \Rightarrow \exists x D(x)$	$\exists x [G(x) \Rightarrow [\exists x D(x)]]$



Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la **N90** est verglassée.
On en déduit que la **N90** est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\frac{\begin{matrix} \vdots \\ G(N90) \end{matrix}}{\exists x G(x)}$$

Pour démontrer $\exists x P(x)$

- ▶ proposer un individu t , appelé un *témoin*
- ▶ démontrer $P(t)$
- ▶ inférer $\exists x P(x)$



Anonymat

Le **nom** d'une variable **quantifiée** n'est pas significatif

- ▶ $\exists x G(x)$ = **une route** est glissante
- ▶ $\exists y G(y)$ = **une route** est glissante

→ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- ▶ De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x $D35$, $N90$, $N7$, ...
- ▶ De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y $D35$, $N90$, $N7$, ...

→ On peut conclure à $\exists x G(x)$ chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa



Élimination (utilisation) d'une formule existentielle

Informellement : pour utiliser l'information contenue dans $\exists x P(x)$, on se donne un tel individu – on le nomme y par exemple – et on travaille avec.

Plus formellement : que sait-on lorsque l'on a démontré $\exists x P(x)$?

- ▶ qu'il existe un individu vérifiant le prédicat P
- ▶ mais on ne sait pas lequel

Un peu comme pour $A \vee B$:

- ▶ on sait que l'un (au moins) parmi A et B est vérifié,
- ▶ mais on ne sait pas lequel

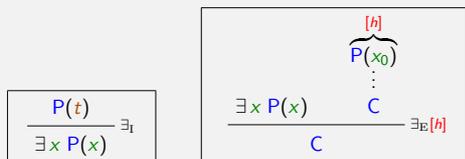
De même on considère tous les cas aboutissant à $\exists x P(x)$

- ▶ on suppose $P(x_0)$ pour un x_0 arbitraire
- ▶ sous cette hypothèse on démontre C

On peut alors inférer C à partir de $\exists x P(x)$



Introduction et élimination de \exists



Conditions d'application de \exists_E

- ▶ Dans la preuve de C à partir de $P(x_0)$, x_0 ne doit être libre dans aucune hypothèse disponible exceptée h .
- ▶ C ne doit pas dépendre de x_0 (c-à-d. ne doit pas comporter d'occurrence libre de x_0)



Exemple

S'il existe **une route** verglassée, alors il existe **une route** glissante.

- ▶ soit r_0 une route quelconque
- ▶ supposons que r_0 est verglassée
- ▶ comme toute route verglassée est glissante, r_0 est glissante
- ▶ donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{1}{\forall x V(x) \Rightarrow G(x)}{\forall_B(\frac{x}{r_0})} V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}{G(r_0)} \exists_1}{\exists r V(r)} \exists_5}{\exists r G(r)} \exists_E [6]$$

