Modèles de Calcul [Lambda-Calcul]
Règles du typage simple

Martin Bodin, Pascal Fradet, Jean-François Monin

1 Rappels de cours

Pour formaliser les règles de typage on a préalablement besoin de la notion d'*environnement*, qui est une séquence d'associations entre variable et type et qui permet de détermnier le type d'une variable libre dans un terme. Ces environnements sont formés ainsi :

— ε est un environnement (l'environnement vide) ;

— si Γ est un environnement, x une variable et τ un type, alors $\Gamma;(x,\tau)$ est un environnement.

On peut alors dériver des *jugements de typage* qui s'écrivent $\Gamma \vdash \mathrm{U} : \tau$ où Γ est un environnement, U est un terme et τ est un type. On commence par le typage d'une variable x dans un environnement, qui s'effectue en parcourant ce dernier de droite à gauche :

— $\Gamma;(x,\tau) \ \vdash \ x : \tau$;

— Si $\Gamma \ \vdash \ x : \tau$, et si $x \neq y$, alors $\Gamma;(y,\tau') \ \vdash \ x : \tau$.

Le typage d'un λ-terme quelconque s'effectue en décomposant sa structure. Le cas d'une variable a déjà été présenté, il reste l'application et l'abstraction :

— si $\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U} : \tau_1 \to \tau_2$, et si $\Gamma \ \vdash \ \mathrm{V} : \tau_1$, alors $\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U\,V} : \tau_2$;

— si $\Gamma;(x,\tau_1) \ \vdash \ \mathrm{U} : \tau_2$, alors $\Gamma \ \vdash \ (\lambda x^{\tau_1}.\mathrm{U}) : \tau_1 \to \tau_2$.

Dans le cas du λ-calcul étendu avec des entiers primitifs, on complète par des règles de typages des opérations arithmétiques :

— si $\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U} : \mathtt{nat}$, et si $\Gamma \ \vdash \ \mathrm{V} : \mathtt{nat}$, alors $\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U}+\mathrm{V} : \mathtt{nat}$ et $\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U}-\mathrm{V} : \mathtt{nat}$;

Ces règles de typage peuvent être présentées synthétiquement sous forme de **règles d'inférence** comme suit.

$$\frac{}{\Gamma;(x,\tau) \ \vdash \ x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ x : \tau \qquad x \neq y}{\Gamma;(y,\tau') \ \vdash \ x : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U} : \tau_1 \to \tau_2 \qquad \Gamma \ \vdash \ \mathrm{V} : \tau_1}{\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U\,V} : \tau_2} \qquad \frac{\Gamma;(x,\tau_1) \ \vdash \ \mathrm{U} : \tau_2}{\Gamma \ \vdash \ (\lambda x^{\tau_1}.\mathrm{U}) : \tau_1 \to \tau_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \ \vdash \ 0 : \mathtt{nat}} \qquad \frac{}{\Gamma \ \vdash \ 1 : \mathtt{nat}} \qquad \frac{}{\Gamma \ \vdash \ 2 : \mathtt{nat}} \qquad \text{etc.}$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U} : \mathtt{nat} \qquad \Gamma \ \vdash \ \mathrm{V} : \mathtt{nat}}{\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U}+\mathrm{V} : \mathtt{nat}} \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U} : \mathtt{nat} \qquad \Gamma \ \vdash \ \mathrm{V} : \mathtt{nat}}{\Gamma \ \vdash \ \mathrm{U}-\mathrm{V} : \mathtt{nat}}$$

2 Exercices sur papier

2.1 Typage de variables

Donner le type de x (et justifier) dans les environnements suivants :

1/ $\varepsilon; (x, \texttt{nat}); (y, \texttt{nat} \to \texttt{nat})$

2/ $\varepsilon; (x, \texttt{nat}); (y, \texttt{nat} \to \texttt{nat}); (x, \texttt{nat} \to \texttt{nat})$

3/ $\varepsilon; (x, \texttt{nat} \to \texttt{nat}); (y, \texttt{nat} \to \texttt{nat}); (x, \texttt{nat})$

4/ ε

2.2 Typage de λ-termes

Dériver les jugements de typage adéquats pour :

1/ $2 + x$

2/ $\lambda x.\, 2 + x$

3/ $(\lambda x. 2 + x)\ 3$

(Il faut donc arriver à $(\lambda x. 2 + x)\ 3$, qui suffit pour illustrer l'ensemble des règles).