INF122 2008-2009 – TD série 8

Le thème général est celui des démonstrations par récurrence (simple, généralisé, structurelle). On pourra ponctuellement développer l'arbre de preuve, mais on privilégiera une présentation textuelle rigoureuse.

On considère l'ensemble des naturels, défini de manière inductive.
- 0 est un entier naturel
- si n est un entier naturel, $\mathrm{S}(n)$ est un entier naturel

On définit l'addition par les 2 équations suivantes (admis) :
- Axiome $+0$: $\forall n, n+0=n$
- Axiome $+S$: $\forall n, \forall m, n+\mathrm{S}(m)=\mathrm{S}(n+m)$

On définit la relation $\leq$ par
- $\forall n \forall m, n \leq m$ ssi $\exists x, n+x=m$

Exercice 1

Démontrer que 0 est neutre à gauche, *i.e.* $\forall n, 0+n=n$

Corrigé

Par récurrence simple. La partie centrale de la preuve peut se rédiger ainsi :

$$\mathcal{D}_0 \left\{ \begin{array}{ll} & 0+S(p) \\ = & \qquad \{+S \text{ avec les substitutions } \frac{n}{0} \text{ et } \frac{m}{p}\} \\ & S(0+p) \\ = & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence (1)}\} \\ & S(p) \end{array} \right.$$

Ce qui donne l'arbre de preuve suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall n\ \ n+0=n}\,{\scriptstyle +0}}{0+0=0}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(\frac{n}{0})} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{0+p=p}^{[1]}}{0+S(p)=S(p)}\,\mathcal{D}_0}{0+p=p \Rightarrow 0+S(p)=S(p)}\,{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}}{\forall n\ 0+n=n \Rightarrow 0+S(n)=S(n)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}}{\forall n\ 0+n=n}\,{\scriptstyle \mathsf{nat\text{-}rec}}$$

Voici l'arbre de preuve monolithique correspondant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall n\ \ n+0=n}\,{\scriptstyle +0}}{0+0=0}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(\frac{n}{0})} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{0+p=p}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall n\ \forall m\ \ n+S(m)=S(n+m)}\,{\scriptstyle +\mathsf{S}}}{\forall m\ 0+\mathrm{S}(m)=\mathrm{S}(0+m)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(\frac{n}{0})}}{0+\mathrm{S}(p)=\mathrm{S}(0+p)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(\frac{m}{p})}}{0+S(p)=S(p)}\,{\scriptstyle =_{\mathrm{E}}}}{0+p=p \Rightarrow 0+S(p)=S(p)}\,{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}}{\forall n\ 0+n=n \Rightarrow 0+S(n)=S(n)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}}{\forall n\ 0+n=n}\,{\scriptstyle \mathsf{nat\text{-}rec}}$$

Exercice 2

Démontrer que + est commutative, *i.e.* $\forall m\,\forall n\; n+m = m+n$.
Commencer par $\forall n\,\forall m\; \mathrm{S}(n)+m = \mathrm{S}(n+m)$ par récurrence sur m (attention, pas sur n). Ensuite procéder par récurrence sur n en utilisant ce résultat et l'exo précédent.

Corrigé

On pose

$$Q_n(m) \overset{\text{déf}}{=\!=} S(n)+m = S(n+m)$$

Démonstration de $Q_n(0)$:

$$\mathcal{Q}_0 \left\{ \begin{array}{ll} & S(n)+0 \\ = & \qquad \{+0 \text{ avec } \frac{n}{S(n)}\} \\ & S(n) \\ = & \qquad \{+0 \text{ avec } \frac{n}{n}\} \\ & S(n+0) \end{array} \right.$$

Cela représente l'arbre de preuve $\mathcal{Q}_0$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall n\;\; n+0=n}\;{\scriptstyle +0}}{n+0=n}\;{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(\frac{n}{n})} \qquad \dfrac{}{S(n+0)=S(n+0)}\;{\scriptstyle =_{\mathrm{I}}}}{S(n)=S(n+0)}\;{\scriptstyle =_{\mathrm{E}}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall n\;\; n+0=n}\;{\scriptstyle +0}}{S(n)+0=S(n)}\;{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(\frac{n}{S(n)})}}{S(n)+0=S(n+0)}\;{\scriptstyle =_{\mathrm{E}}}$$

Démonstration de $Q_n(S(p))$ sous l'hypothèse de récurrence $Q_n(p)$:

$$\mathcal{Q}_S \left\{ \begin{array}{ll} & S(n)+S(p) \\ = & \qquad \{+\mathrm{S} \text{ avec } \frac{n}{S(n)} \text{ et } \frac{m}{p}\} \\ & S(S(n)+p) \\ = & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence}\} \\ & S(S(n+p)) \\ = & \qquad \{+\mathrm{S} \text{ avec } \frac{n}{n} \text{ et } \frac{m}{p}\} \\ & S(n+S(p)) \end{array} \right.$$

Ce qui donne l'arbre de preuve pour $\forall n\,\forall m\; S(n)+m = S(n+m)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\overline{S(n)+0=S(n+0)}}\;\mathcal{Q}_0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{S(n)+p=S(n+p)}^{[1]}}{\overline{S(n)+S(p)=S(n+S(p))}}\;\mathcal{Q}_S}{Q_n(p)\Rightarrow Q_n(S(p))}\;{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}}{\forall m\; Q_n(m)\Rightarrow Q_n(S(m))}\;{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}}{\forall m\; S(n)+m=S(n+m)}\;{\scriptstyle \text{nat-rec}}}{\forall n\,\forall m\; S(n)+m=S(n+m)}\;{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}$$

On pose

$$P_m(n) \overset{\text{déf}}{=\!=} n + m = m + n$$

Démonstration de $P_q(0)$:

$$\mathcal{C}_0 \begin{cases} & 0+q \\ = & \qquad \{0 \text{ neutre à gauche avec } \frac{n}{q}\} \\ & q \\ = & \qquad \{+0 \text{ avec } \frac{n}{q}\} \\ & q+0 \end{cases}$$

Démonstration de $P_q(S(n))$ sous l'hypothèse de récurrence (2) : $P_q(n)$

$$\mathcal{C}_S \begin{cases} & S(n)+q \\ = & \qquad \{Q_n(q)\} \\ & S(n+q) \\ = & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence (2)}\} \\ & S(q+n) \\ = & \qquad \{+S \text{ avec } \frac{n}{q} \text{ et } \frac{m}{n}\} \\ & q+S(n) \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{0+q=q+0}\,\mathcal{C}_0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{n+q=q+n}^{[2]}}{S(n)+q=q+S(n)}\,\mathcal{C}_S}{n+q=q+n \Rightarrow S(n)+q=q+S(n)}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]}{\forall n\; n+q=q+n \Rightarrow S(n)+q=q+S(n)}\,\forall_{\mathrm{I}}}{\forall n\; n+q=q+n}\,\text{nat-rec}}{\forall m\,\forall n\; n+m=m+n}\,\forall_{\mathrm{I}}$$

Exercice 3

Démontrer que + est associative, *i.e.*
– $\forall n\, \forall m\, \forall p\,,\, n+(m+p)=(n+m)+p$

Corrigé

Par récurrence simple sur n. On peut se permettre de fixer m et p, i.e. montrer en fait $\forall m\, \forall p\, \forall n\,,\, n+(m+p)=(n+m)+p$

Exercice 4

Démontrer que $\leq$ est réflexive et transitive

Corrigé

Réflexive : trivial.
Transitive : on élimine 2 exists et on en introduit un avec la somme des témoins en utilisant l'associativité de + (exo d'avant).
Par contre l'antisymétrie demande beaucoup plus de travail.

Exercice 5

Les plaquettes de chocolat
Prenons une plaquette de n carrés et découpons la en suivant les rainures. En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Corrigé

n - 1, par récurrence généralisée. Moralement : si n plus grand que 1, on coupe la tablette de n en n_1 et n_2 avec donc $n_1 < n$ et $n_2 < n$ et $n_1 + n_2 = n$, on applique l'hypothèse de récurrence sur n_1 et n_2 et çà roule. Cela ne dépend pas des choix successifs des rainures !

Exercice 6

On considère le singleton {B} (comme bâton). On considère l'ensemble des listes de bâtons, défini de manière inductive.
– Nil est une liste de bâtons
– si l est une liste de bâtons, B : : l est une liste de bâtons.
Énoncer le principe de récurrence structurelle sur les listes de bâtons. Montrer qu'à tout entier n on peut associer une unique liste de bâtons.

Corrigé

Soit P une propriété des listes de bâtons. Si on a $P(\text{Nil})$ et si pour toute liste l, $P(l) \Rightarrow P(\text{B} :: l)$, on infère $P(l)$ pour toute liste l.
La réciproque, c'est la longueur.