

Pour les questions de cette série, commencer par faire des dessins de « patatoïdes » pour deviner la réponse. Les justifications demandées sont textuelles dans un premier temps. On pourra revenir par la suite à ces exercices en utilisant des arbres de preuve.

Exercice 1

Complétez les pointillés

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in A \cap B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in A \cup B\}$$

$$A \cup (B \setminus C) = \{x \mid x \in A \vee (x \in B \wedge \neg(x \in C))\}$$

$$\mathbb{N} = \{x \mid \exists k, k \in \mathbb{N} \wedge (x = 2 \times k \vee x = 2 \times k + 1)\}$$

$$\mathbb{N} \setminus \{2 \times k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k, k \in \mathbb{N} \wedge \neg(x = 2 \times k)\}$$

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \\ \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \end{array} \right\}$$

$$\{1, 3, 5\} \setminus \{1, 2\} = \{3, 5\}$$

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2, 3, ?, ?\} = \emptyset$$

$$\{1, 2, 3\} \setminus (\{2, 4, 6\} \setminus \{2, ?, ?, ?\}) = \{1, 2, 3\}$$

Exercice 2

Barrez les relations suivantes lorsqu'elles ne sont pas vraies

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 3, 3, 1\} = \{2, 3\} \cup \{1\} \cup \{3\} \cup \emptyset$$

$$\{1, 2, 3\} \neq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \neq \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} \cup \{\} = \{1, 2, 3\} \cup \emptyset \neq \{1, 2, 3\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\{\{1, 2, 3\}\} \neq \{\{1, 2\}\} \cup \{\{3\}\}$$

$$\{1\} \not\subseteq \{2\} \subseteq \{1, 2\} \not\subseteq \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$$

$$\{\{1\}, \{2\}\} \not\subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$\{1, 2\} \not\subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$$

$$\{\{1, 2\}\} \notin \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$$

$$\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$$

$$\{\{1, 2\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$$

Exercice 3

a) Commencez par compléter les rappels de définitions qui vous seront utiles

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\stackrel{def}{=} x \in A \vee x \in B \\ x \in A \cap B &\stackrel{def}{=} x \in A \wedge x \in B \\ A \subseteq B &\stackrel{def}{=} \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \\ A = B &\stackrel{def}{=} A \subseteq B \wedge B \subseteq A \end{aligned}$$

b) Démontrez les règles suivantes en Dédution Naturelle, en particulier r_1 et r_3

$$\frac{\frac{E \subseteq F \cap G}{E \subseteq F}}{r_1}$$

Pour prouvez que la règle r_1 est une déduction correcte, on démontrez que $(E \subseteq F \cap G) \Rightarrow (E \subseteq F)$.

$$\frac{\frac{E \subseteq F \cap G}{\boxed{E} \subseteq \boxed{G}}}{r_2}$$

$$\frac{\frac{E \cup F \subseteq G}{\boxed{E} \subseteq \boxed{G}}}{r_3}$$

$$\frac{\frac{E \cup F \subseteq G}{\boxed{F} \subseteq \boxed{G}}}{r_4}$$

Corrigé

$$\frac{\frac{\frac{\overbrace{x_0 \in E}^{[2]}}{x_0 \in E \vee x_0 \in F}}{\cup \text{déf}}}{x_0 \in E \cup F} \quad \frac{\frac{\frac{E \cup F \subseteq G}{\dots \subseteq \text{déf}}}{\forall x, x \in E \cup F \Rightarrow x \in G} \quad \frac{\frac{x_0 \in E \cup F \Rightarrow x_0 \in G}{\Rightarrow_E}}{\Rightarrow_1[2]}}{x_0 \in E \Rightarrow x_0 \in G} \quad \frac{\frac{\forall x, x \in E \Rightarrow x \in G}{\dots \subseteq \text{déf}}}{E \subseteq G}}{\cup \text{déf}}$$

c) **Que peut-on déduire de ?** Faites des propositions puis essayez de les falsifier en donnant un contre-exemple ou essayez de les démontrez en donnant une preuve à l'aide des règles démontrées au (a).

Etant donné trois ensembles A, B, C ,

1. Que peut-on déduire :

- de $A = A \cap B$?

a-t'on l'implication $A = A \cap B \stackrel{?}{\Rightarrow} A \subseteq B$?

a-t'on l'implication $A = A \cap B \stackrel{?}{\Rightarrow} B \subseteq A$?

- de $A = A \cup B$?

- de $A \cap B = A \cup B$?

- de $A \cup B = A \cap C$?

2. Que peut-on dire des deux ensembles B et C dans le cas où :

$$A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C.$$

3. Que peut-on dire des deux ensembles A et B dans le cas où :

$$A \cap C = B \cap C = \emptyset \text{ et } A \cup B = B \cup C.$$

4. Comparer $(A \setminus B) \setminus C$ et $A \setminus (B \setminus C)$

Corrigé

Exercice 4

1. On considère un ensemble E , l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, et les sous-ensembles de E : A et B , éléments de $\mathcal{P}(E)$. Comparer

$$\mathcal{P}(A \cup B) \text{ et } \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B),$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) \text{ et } \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

2. Dans sa définition explicite $\emptyset = \{ \}$; donner la définition explicite de $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$

Corrigé