INF122 2008-2009 – TD série 5

Pour les questions de cette série, commencer par faire des dessins de « patatoïdes »pour deviner la réponse. Les justifications demandées sont textuelles dans un premier temps. On pourra revenir par la suite à ces exercices en utilisant des arbres de preuve.

Exercice 1

Complétez les pointillés

$$A \ldots\ldots\ B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \mid x \in A \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} = \{x \mid x \in A \ \ldots\ldots\ B\}$$

$$A \ldots\ldots\ B = \{x \mid \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \vee \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \} = \{x \mid x \in A \ \ldots\ldots\ B\}$$

$$A \cup (B \setminus \ \ldots\ldots\ ) = \big\{x \mid \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \vee \big(x \in B \ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ (x \in C)\big)\big\}$$

$$\mathbb{N} = \big\{x \mid \exists k,\ k \in \mathbb{N} \wedge \big(x = 2 \times k \ \ldots\ldots\ x = 2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \big)\big\}$$

$$\mathbb{N} \setminus \{2 \times k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k, k \in \mathbb{N} \wedge \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}$$

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$\{1,3,5\} \setminus \{1,2\} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\{1,2,3\} \setminus \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ = \emptyset$$

$$\{1,2,3\} \setminus \big(\{2,4,6\} \setminus \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\big) = \{1,2,3\}$$

Exercice 2

Barrez les relations suivantes lorsqu'elles ne sont pas vraies

$$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{2,3,3,1\} = \{2,3\} \cup \{1\} \cup \{3\} \cup \emptyset$$

$$\{1,2,3\} = \big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\} = \big\{\{1,2,3\}\big\}$$

$$\{1,2,3\} = \{1,2,3\} \cup \{\} = \{1,2,3\} \cup \emptyset = \{1,2,3\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\big\{\{1,2,3\}\big\} = \big\{\{1,2\}\big\} \cup \big\{\{3\}\big\}$$

$$\{1\} \subseteq \{2\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \big\{\{1,2\},\{1,2,3\}\big\} \subseteq \big\{\{1,2\},\{1,2,3\},\emptyset\big\}$$

$$\big\{\{1\},\{2\}\big\} \subseteq \big\{\{1,2,3\}\big\}$$

$$\{1,2\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

$$\big\{\{1,2\}\big\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

$$\{1,2\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

$$\big\{\{1,2\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

Exercice 3

a) Commencez par compléter les rappels de définitions qui vous seront utiles

$$\begin{array}{rcl} x \in A \ \ldots\ldots\ B & \stackrel{def}{=} & x \in A \vee x \in B \\ x \in A \ \ldots\ldots\ B & \stackrel{def}{=} & x \in A \wedge x \in B \\ A \subseteq B & \stackrel{def}{=} & \ldots\ldots\ x,\ x \in \ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ x \in \ \ldots\ldots \\ A = B & \stackrel{def}{=} & A \ \ldots\ldots\ B \ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ \subseteq \ \ldots\ldots \end{array}$$

b) Démontrez les règles suivantes en Déduction Naturelle, en particulier r_1 et r_3

$$\frac{E \subseteq F \cap G}{E \subseteq F}\, r_1$$

Pour prouvez que la règle r_1 est une déduction correcte, on démontrez que $(E \subseteq F \cap G) \Rightarrow (E \subseteq F)$.

$$\frac{E \subseteq F \cap G}{\ldots\ldots \subseteq \ldots\ldots}\, r_2$$

$$\frac{E \cup F \subseteq G}{\ldots\ldots \subseteq \ldots\ldots}\, r_3$$

$$\frac{E \cup F \subseteq G}{\ldots\ldots \subseteq \ldots\ldots}\, r_4$$

c) Que peut-on déduire de ? Faîtes des propositions puis essayez de les falsifier en donnant un contre-exemple ou essayez de les démontrez en donnant une preuve à l'aide des règles démontrées au **(a)**.
Etant donné trois ensembles A, B, C,

1. Que peut-on déduire :
   - de $A = A \cap B$?

     a-t'on l'implication $A = A \cap B \overset{?}{\Rightarrow} A \subseteq B$?

     a-t'on l'implication $A = A \cap B \overset{?}{\Rightarrow} B \subseteq A$?
   - de $A = A \cup B$?
   - de $A \cap B = A \cup B$?
   - de $A \cup B = A \cap C$?
2. Que peut-on dire des deux ensembles B et C dans le cas où :

$$A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C.$$

3. Que peut-on dire des deux ensembles A et B dans le cas où :

$$A \cap C = B \cap C = \emptyset \text{ et } A \cup B = B \cup C.$$

4. Comparer $(A \setminus B) \setminus C$ et $A \setminus (B \setminus C)$

Exercice 4

1. On considère un ensemble E, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, et les sous-ensembles de E : A et B, éléments de $\mathcal{P}(E)$.Comparer

$$\mathcal{P}(A \cup B) \text{ et } \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B),$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) \text{ et } \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

2. Dans sa définition explicite $\emptyset = \{\ \}$; donner la définition explicite de $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$