

Démontrer la proposition logique en énoncé en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle.

Exercice 1

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Corrigé

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\neg B}^{[2]} \\
 \dots \dots \dots \neg \text{déf} \\
 B \Rightarrow \perp
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^{[1]} \\
 \dots \dots \dots \neg \text{déf} \\
 B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^{[3]} \\
 \dots \dots \dots \neg \text{déf} \\
 \perp
 \end{array}
 \Rightarrow_{\text{E}}
 \\
 \hline
 \perp \Rightarrow_{\text{I}[3]} \\
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow \perp}^{\dots \dots \dots \neg \text{déf}} \\
 \neg A
 \end{array} \Rightarrow_{\text{I}[2]} \\
 \hline
 \neg B \Rightarrow \neg A \Rightarrow_{\text{I}[1]} \\
 \hline
 (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)
 \end{array}$$

Exercice 2

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Exercice 3

$$(\neg A \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

Exercice 4

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Exercice 5

$$\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

Exercice 6

$$\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Les exercices suivants sont plus difficiles : on demande dans un premier temps de ne pas utiliser le tiers-exclu ni l'élimination de la double négation, sauf indication contraire.

Exercice 7

$$([A \Rightarrow (A \vee \perp)] \Rightarrow (\perp \vee A)) \Rightarrow A$$

$$\frac{\frac{\frac{\overbrace{[(A \Rightarrow (A \vee \perp)) \Rightarrow (\perp \vee A)]}^{[1]}}{\perp \vee A}}{\perp \vee A} \quad \frac{\frac{\overbrace{A}^{[4]}}{A \vee \perp} \vee_{I1} \quad (A \Rightarrow (A \vee \perp)) \Rightarrow_E}{(A \Rightarrow (A \vee \perp)) \Rightarrow_E} \Rightarrow_I[4] \quad \frac{\overbrace{\perp}^{[2]}}{A} \perp_E \quad \overbrace{A}^{[3]}}{A} \vee_E[2,3]}{A} \vee_E[2,3]}{([A \Rightarrow (A \vee \perp)] \Rightarrow (\perp \vee A)) \Rightarrow A} \Rightarrow_I[1]$$

Les exercices suivants comportent deux énoncés. L'élimination de la double négation n'est autorisée que dans le second. Démontrer également ce second résultat en utilisant le tiers exclu.

Exercice 8

- 1) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee B)$
- 2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$

Corrigé

1)

$$\frac{\frac{\overbrace{\neg(\neg A \vee B)}^{[2]} \quad \frac{\frac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{[1]} \quad \overbrace{A}^{[3]}}{B} \Rightarrow_E}{\neg A \vee B} \vee_{I2}}{\neg(\neg A \vee B)} \Rightarrow_E}{\perp} \Rightarrow_I[3] \quad \frac{\perp}{\neg A} \Rightarrow_I[3]}{\frac{\perp}{\neg A \vee B} \vee_{I1}} \Rightarrow_E} \Rightarrow_E} \Rightarrow_I[2]}{\frac{\perp}{\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow \perp} \Rightarrow_I[2]} \Rightarrow_I[1]}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee B)} \Rightarrow_I[1]$$

2)

$$\frac{\overbrace{\neg(\neg A \vee B)}^{[2]} \quad \frac{idem}{\neg A \vee B} \vee_{I1}}{\perp} \Rightarrow_E} \Rightarrow_E} \Rightarrow_I[2]}{\frac{\perp}{\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow \perp} \Rightarrow_I[2]} \Rightarrow_I[1]}{\frac{\perp}{\neg A \vee B} \neg\neg_E} \Rightarrow_I[1]}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)} \Rightarrow_I[1]$$

Avec le tiers-exclu, c'est plus naturel :

$$\frac{\frac{\overbrace{A \vee \neg A}^{\frac{1}{3} ex}}{A \vee \neg A} \quad \frac{\frac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{[1]} \quad \overbrace{A}^{[2]}}{B} \Rightarrow_E}{\neg A \vee B} \vee_{I2} \quad \frac{\overbrace{\neg A}^{[3]}}{\neg A \vee B} \vee_{I1}}{\neg A \vee B} \vee_E[2,3]}{\neg A \vee B} \vee_E[2,3]}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)} \Rightarrow_I[1]$$

Exercice 9

$$1) (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg(B \Rightarrow A)$$

$$2) (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Exercice 10

$$1) \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$2) \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

Quelques phénomènes curieux : étudier les théorèmes suivants, en utilisant l'élimination de la double négation à bon escient.

Exercice 11

$$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$$

Exercice 12

$$[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee C]$$

Exercice 13

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow P \vee Q) \Leftrightarrow (A \Rightarrow P) \vee (B \Rightarrow Q)$$

Variante : démontrer sans tiers exclu ni passage à la double négation

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow (P \Rightarrow X) \vee (Q \Rightarrow X)) \Rightarrow ([(A \Rightarrow P \Rightarrow X) \vee (B \Rightarrow Q \Rightarrow X)] \Rightarrow X) \Rightarrow X$$