

Démontrer la proposition logique en énoncé en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle.

### Exercice 1

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

### Exercice 2

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

### Exercice 3

$$(\neg A \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

### Exercice 4

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

### Exercice 5

$$\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

### Exercice 6

$$\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Les exercices suivants sont plus difficiles : on demande dans un premier temps de ne pas utiliser le tiers-exclu ni l'élimination de la double négation, sauf indication contraire.

### Exercice 7

$$([A \Rightarrow (A \vee \perp)] \Rightarrow (\perp \vee A)) \Rightarrow A$$

Les exercices suivants comportent deux énoncés. L'élimination de la double négation n'est autorisée que dans le second. Démontrer également ce second résultat en utilisant le tiers exclu.

### Exercice 8

$$1) (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee B)$$

$$2) (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$$

### Exercice 9

$$1) (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg(B \Rightarrow A)$$

$$2) (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

### Exercice 10

$$1) \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$2) \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

Quelques phénomènes curieux : étudier les théorèmes suivants, en utilisant l'élimination de la double négation à bon escient.

**Exercice 11**

$$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$$

**Exercice 12**

$$[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee C]$$

**Exercice 13**

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow P \vee Q) \Leftrightarrow (A \Rightarrow P) \vee (B \Rightarrow Q)$$

Variante : démontrer sans tiers exclu ni passage à la double négation

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow (P \Rightarrow X) \vee (Q \Rightarrow X)) \Rightarrow ([A \Rightarrow P \Rightarrow X] \vee [B \Rightarrow Q \Rightarrow X]) \Rightarrow X \Rightarrow X$$