

Pour chacun des exercices suivants, il s'agit de démontrer une proposition logique en déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve. Attention à la portée des hypothèses.

Exercice 1

Socrate est un homme et tous les hommes sont mortels, donc Socrate est mortel.

$$[H(a) \wedge (\forall x H(x) \Rightarrow M(x))] \Rightarrow M(a)$$

Remarque : essayer également $H(a) \Rightarrow (\forall x H(x) \Rightarrow M(x)) \Rightarrow M(a)$
(l'arbre de preuve est plus simple).

Corrigé

$$\frac{\frac{\frac{H(a) \wedge (\forall x H(x) \Rightarrow M(x))}{\forall x H(x) \Rightarrow M(x)} \wedge_{E2} \quad \frac{H(a) \wedge (\forall x H(x) \Rightarrow M(x))}{H(a)} \wedge_{E1}}{H(a) \Rightarrow M(a)} \forall_E(\frac{x}{a}) \quad \frac{H(a)}{M(a)} \Rightarrow_E}{M(a)} \Rightarrow_I[1]}{[H(a) \wedge (\forall x H(x) \Rightarrow M(x))] \Rightarrow M(a)} \Rightarrow_I[1]$$

$$\frac{\frac{\frac{(\forall x H(x) \Rightarrow M(x))}{H(a) \Rightarrow M(a)} \forall_E(\frac{x}{a}) \quad \frac{H(a)}{M(a)} \Rightarrow_E}{M(a)} \Rightarrow_I[2]}{(\forall x H(x) \Rightarrow M(x)) \Rightarrow M(a)} \Rightarrow_I[1]}{H(a) \Rightarrow (\forall x H(x) \Rightarrow M(x)) \Rightarrow M(a)} \Rightarrow_I[1]$$

Exercice 2

$$[(\forall x F(x)) \wedge (\forall y F(y) \Rightarrow G(y))] \Rightarrow \forall z G(z)$$

Remarque : comparer avec $(\forall x F(x)) \Rightarrow (\forall y F(y) \Rightarrow G(y)) \Rightarrow \forall z G(z)$

Corrigé

$$\frac{\frac{\frac{(\forall x F(x)) \wedge (\forall y F(y) \Rightarrow G(y))}{\forall y F(y) \Rightarrow G(y)} \wedge_{E2} \quad \frac{(\forall x F(x)) \wedge (\forall y F(y) \Rightarrow G(y))}{\forall x F(x)} \wedge_{E1}}{F(x_0) \Rightarrow G(x_0)} \forall_E(\frac{y}{x_0}) \quad \frac{\forall x F(x)}{F(x_0)} \forall_E(\frac{x}{x_0})}{G(x_0)} \Rightarrow_E}{\forall z G(z)} \forall_I}{[(\forall x F(x)) \wedge (\forall y F(y) \Rightarrow G(y))] \Rightarrow \forall z G(z)} \Rightarrow_I[1]$$

Exercice 3

$$[\forall x \forall y F(x) \vee (G(y) \Rightarrow F(x))] \Rightarrow \forall x G(x) \Rightarrow F(x)$$

Corrigé

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overbrace{\forall x \forall y F(x) \vee (G(y) \Rightarrow F(x))}^{[1]}}{\forall x \forall y F(x) \vee (G(y) \Rightarrow F(x_0))} \forall_E(\frac{x}{x_0}) \\
 \frac{\overbrace{\forall y F(x_0) \vee (G(y) \Rightarrow F(x_0))}^{\forall_E(\frac{y}{x_0})}}{F(x_0) \vee (G(x_0) \Rightarrow F(x_0))} \forall_E(\frac{y}{x_0}) \\
 \frac{F(x_0)}{F(x_0)} \forall_I \\
 \frac{F(x_0)}{G(x_0) \Rightarrow F(x_0)} \Rightarrow_I[2] \\
 \frac{G(x_0) \Rightarrow F(x_0)}{\forall x G(x) \Rightarrow F(x)} \forall_I \\
 \frac{\forall x G(x) \Rightarrow F(x)}{[\forall x \forall y F(x) \vee (G(y) \Rightarrow F(x))] \Rightarrow \forall x G(x) \Rightarrow F(x)} \Rightarrow_I[1]
 \end{array}$$

Exercice 4

$$(\forall x \forall y R(x, y)) \Rightarrow (\forall y \forall x R(x, y))$$

Corrigé

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overbrace{\forall x \forall y R(x, y)}^{[1]}}{\forall y R(x_1, y)} \forall_E(\frac{x}{x_1}) \\
 \frac{\forall y R(x_1, y)}{R(x_1, x_0)} \forall_E(\frac{y}{x_0}) \\
 \frac{R(x_1, x_0)}{\forall x R(x, x_0)} \forall_I \\
 \frac{\forall x R(x, x_0)}{\forall y \forall x R(x, y)} \forall_I \\
 \frac{\forall y \forall x R(x, y)}{(\forall x \forall y R(x, y)) \Rightarrow (\forall y \forall x R(x, y))} \Rightarrow_I[1]
 \end{array}$$

Exercice 5

$$G(x_0) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y)) \Rightarrow (F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow G(x))$$

Corrigé

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overbrace{G(x_0) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y))}^{[1]}}{\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y)} \wedge_E2 \\
 \frac{\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y)}{F(x_0) \Rightarrow \forall y G(y)} \forall_E(\frac{x}{x_0}) \\
 \frac{F(x_0) \Rightarrow \forall y G(y)}{\forall y G(y)} \Rightarrow_E \\
 \frac{\forall y G(y)}{G(x_1)} \forall_E(\frac{y}{x_1}) \\
 \frac{G(x_1)}{\forall x G(x)} \forall_I \\
 \frac{\forall x G(x)}{F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)} \Rightarrow_I[2] \\
 \frac{F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)}{(F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow G(x))} \wedge_I \\
 \frac{(F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow G(x))}{G(x_0) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y)) \Rightarrow (F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow G(x))} \Rightarrow_I[1]
 \end{array}$$

Attention : l'arbre de preuve suivant n'est pas valide (introduction de \forall alors que x_0 est libre dans une hypothèse disponible) :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\overbrace{G(x_0) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y))}^{[1]}}{\wedge E1} \quad \frac{G(x_0)}{\forall I} \quad \frac{\forall x G(x)}{\Rightarrow I[2]} \quad F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)}{\wedge I} \quad \frac{\overbrace{G(x_0) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y))}^{[1]}}{\wedge E2} \quad \frac{\forall x F(x)}{\forall E(\frac{x}{x_1})} \quad \frac{F(x_1) \Rightarrow \forall y G(y)}{\Rightarrow E} \quad \frac{\overbrace{F(x_1)}^{[3]}}{\Rightarrow E}}{\wedge I} \quad \frac{\forall y G(y)}{\forall E(\frac{y}{x_1})} \quad \frac{G(x_1)}{\Rightarrow I[3]} \quad \frac{F(x_1) \Rightarrow G(x_1)}{\forall I} \quad \frac{\forall x F(x) \Rightarrow G(x)}{\wedge I}}{\Rightarrow I[1]} \\
 G(x_0) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow \forall y G(y)) \Rightarrow (F(x_0) \Rightarrow \forall x G(x)) \wedge (\forall x F(x) \Rightarrow G(x))
 \end{array}$$

Exercice 6

$$[(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))] \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

Exercice 7

$$[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))] \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Exercice 8

$$[\forall x (P(x) \wedge Q(x))] \Rightarrow [(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))]$$

Exercice 9

$$[\exists x (P(x) \wedge Q(x))] \Rightarrow [(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))]$$

Exercice 10

$$[\exists x (P(x) \vee Q(x))] \Rightarrow [(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))]$$

Exercice 11

$$[(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))] \Rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

Exercice 12

$$[\exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y))] \Rightarrow [\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))]$$

Exercice 13

$$[(\exists x P(x)) \wedge (\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)))] \Rightarrow [\exists z Q(z)]$$

Exercice 14

$$[(\forall x \exists y P(x, y)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow G(x, z)))] \Rightarrow [\forall x \exists y (G(x, y))]$$