

Pour les exercices suivants, démontrer la proposition logique en énoncé en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle. Prendre particulièrement soin de la gestion des hypothèses : pour chaque sous-arbre, l'étudiant devra être capable de distinguer les hypothèses disponibles des hypothèses levées.

Exercice 1

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$$

Rappelons qu'il faut la lire ainsi : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

Corrigé

$$\frac{\frac{\frac{\overbrace{A \Rightarrow B \Rightarrow C}^{[1]}}{B \Rightarrow C}}{A \wedge B \Rightarrow C} \Rightarrow_E \quad \frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]}}{A} \wedge_{E1}}{B \Rightarrow C} \Rightarrow_E}{C} \Rightarrow_I[2]}{\frac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]}}{B} \wedge_{E2}}{A \wedge B \Rightarrow C} \Rightarrow_I[1]} \Rightarrow_I[1]$$

Exercice 2

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

Exercice 3

$$A \wedge B \Rightarrow A; \quad B \wedge A \Rightarrow A; \quad A \wedge A \Rightarrow A$$

Exercice 4

$$((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C)); \quad (A \wedge (B \wedge C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

Exercice 5

$$((A \wedge B) \Rightarrow A \Rightarrow D) \Rightarrow (C \wedge A \wedge C \Rightarrow B \Rightarrow D)$$

Remarque : par convention, $P \wedge Q \wedge R$ se lit $(P \wedge Q) \wedge R$.

Question subsidiaire : trouver un arbre de preuve sans répétition.

Exercice 6

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

Corrigé

$$\frac{\frac{\frac{\overbrace{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}^{[1]}}{B \Rightarrow C}}{A \Rightarrow C} \Rightarrow_E \quad \frac{\frac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{[2]}}{B} \wedge_{E2} \quad \overbrace{A}^{[3]}}{A \Rightarrow C} \Rightarrow_E}{C} \Rightarrow_I[3]}{\frac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{[2]}}{A \Rightarrow C} \Rightarrow_I[2]}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)} \Rightarrow_I[1]} \Rightarrow_I[1]$$

Exercice 7

$$(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$$

Corrigé

$$\frac{\frac{\overbrace{A \vee B \Rightarrow C}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]} \vee_{I2}}{A \vee B} \Rightarrow_E}{C} \Rightarrow_{I[2]}}{A \Rightarrow C} \Rightarrow_{I[1]} (A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$$

Exercice 8

$$(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$$

Exercice 9

$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

Exercice 10

$$B \wedge (A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \vee C$$

Exercice 11

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$$

Exercice 12

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

Corrigé

$$\frac{\overbrace{(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A \Rightarrow C}^{[3]} \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]} \wedge_{E1}}{A} \Rightarrow_E}{C} \quad \frac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{[4]} \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]} \wedge_{E2}}{B} \Rightarrow_E}{C}}{C} \vee_{E[3,4]} \Rightarrow_{I[2]} (A \wedge B) \Rightarrow C}{(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)} \Rightarrow_{I[1]}$$

Exercice 13

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$$

Corrigé

$$\frac{\overbrace{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}^{[1]} \quad \frac{\frac{\overbrace{A \wedge C}^{[2]} \wedge_{E1}}{A} \vee_{I1} \quad \frac{\overbrace{A \wedge C}^{[2]} \wedge_{E2}}{C} \wedge_I}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{\frac{\overbrace{B \wedge C}^{[3]} \wedge_{E2}}{B} \vee_{I2} \quad \frac{\overbrace{B \wedge C}^{[3]} \wedge_{E2}}{C} \wedge_I}{(A \vee B) \wedge C} \vee_E[2,3]}{(A \vee B) \wedge C} \Rightarrow_{\rightarrow_I[1]} (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Exercice 14

$$(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Corrigé

$$\frac{\overbrace{(A \vee B) \wedge C}^{[1]} \wedge_{E1} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]} \quad \frac{\overbrace{(A \vee B) \wedge C}^{[1]} \wedge_{E2}}{C} \wedge_I}{A \wedge C} \vee_{I1} \quad \frac{\overbrace{B}^{[3]} \quad \frac{\overbrace{(A \vee B) \wedge C}^{[1]} \wedge_{E2}}{C} \wedge_I}{B \wedge C} \vee_{I2}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \vee_E[2,3]}{(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \Rightarrow_{\rightarrow_I[1]}$$

Exercice 15

$$(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Corrigé

Méthode 1

$$\frac{\overbrace{(A \wedge B) \vee C}^{[1]} \quad \frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]} \wedge_{E1}}{A} \vee_{I1} \quad \frac{\overbrace{C}^{[3]} \vee_{I2}}{A \vee C} \vee_E[2,3]}{A \vee C} \quad \frac{\overbrace{(A \wedge B) \vee C}^{[1]} \quad \frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^{[4]} \wedge_{E2}}{B} \vee_{I1} \quad \frac{\overbrace{C}^{[5]} \vee_{I2}}{B \vee C} \vee_E[4,5]}{B \vee C} \wedge_I}{(A \vee C) \wedge (B \vee C)} \Rightarrow_{\rightarrow_I[1]} (A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Méthode 2

$$\frac{\overbrace{(A \wedge B) \vee C}^{[1]} \quad \frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]} \wedge_{E1}}{A} \vee_{I1} \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]} \wedge_{E2}}{B} \vee_{I1}}{(A \vee C) \wedge (B \vee C)} \wedge_I \quad \frac{\overbrace{C}^{[3]} \vee_{I2} \quad \frac{\overbrace{C}^{[3]} \vee_{I2}}{B \vee C} \vee_{I2}}{(A \vee C) \wedge (B \vee C)} \vee_E[2,3]}{(A \vee C) \wedge (B \vee C)} \Rightarrow_{\rightarrow_I[1]} (A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Exercice 16

$$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$$

Corrigé

Étape intermédiaire

$$\frac{\frac{\overbrace{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}^{[1]}}{B \vee C} \wedge_{E2} \quad \frac{\frac{\overbrace{A}^{[2]} \quad \overbrace{B}^{[3]}}{A \wedge B} \wedge_I \quad \frac{\overbrace{C}^{[4]}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{I2}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{I1}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{E[3,4]}$$

Arbre complet

$$\frac{\frac{\overbrace{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}^{[1]}}{A \vee C} \wedge_{E1} \quad \frac{\frac{\overbrace{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}^{[1]}}{B \vee C} \wedge_{E2} \quad \frac{\frac{\overbrace{A}^{[2]} \quad \overbrace{B}^{[3]}}{A \wedge B} \wedge_I \quad \frac{\overbrace{C}^{[4]}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{I2}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{I1}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{E[3,4]} \quad \frac{\overbrace{C}^{[5]}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{I2}}{(A \wedge B) \vee C} \vee_{E[2,5]} \Rightarrow_{I[1]} (A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$$

Exercice 17

$$B \wedge (A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \vee C$$

Exercice 18

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$$

Pour chacun des exercices suivants, il s'agit de trouver un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé.

Exercice 19

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$$

Exercice 20

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

Pour les exercices suivants, trouver un arbre de preuve ou un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé.

Exercice 21

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

Exercice 22

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee B)$$

Exercice 23

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$$