INF122 2007-2008 – TD série 1

Exercice 1

1. Aujourd'hui il fait beau, et en plus il a neigé.
2. Paul et son ami Pierre sont tous les deux grenoblois.
3. Ils ont posé une journée de congé.
4. Et comme d'habitude, si Paul va skier avec un ami, alors forcément ils mangent ensemble de la raclette en rentrant le soir.
5. On sait bien que s'il fait beau et qu'il a neigé, tous les grenoblois qui ont un jour de congé, vont faire du ski.
6. De plus, on sait que si quelqu'un mange de la raclette, alors il prend du poids.

A-t-on raison de penser que Paul et Pierre vont prendre du poids ?

Pour répondre à cette question, on note
- B la proposition « il fait beau » ;
- N la proposition « il a neigé » ;
- $A(x, y)$ la proposition « x est un ami de y ».
- $S(x)$ la proposition « x va skier » ;
- $G(x)$ la proposition « x est grenoblois » ;
- $C(x)$ la proposition « x a pris une journée de congé » ;
- $R(x)$ la proposition « x va manger de la raclette » ;
- $P(x)$ la proposition « x va prendre du poids ».

a) Formalisation Complétez la formalisation suivante et donnez le numéro de la phrase qui correspond à chaque formule logique.
- (H_3) $C(Paul) \wedge C(Pierre)$
- (H_2) $A(Paul, Pierre)$
- (H_6) $\forall x, R(x) \Rightarrow P(x)$
- (H_4) $\forall x,\ A(Paul, x) \wedge S(Paul) \wedge S(x) \ \Rightarrow\ R(Paul) \wedge R(x)$
- (H_5) $B \wedge N \ \Rightarrow\ \forall x, G(x) \wedge C(x) \Rightarrow S(x)$
- $(H_{2'})$ $G(Paul) \wedge G(Pierre)$
- (H_1) $B \wedge N$

But de l'exercice Le but de l'exercice est déduire $P(Paul) \wedge P(Pierre)$ à partir des hypothèses H_1 à H_6. Pour faire cette preuve sous la forme d'un arbre on va utiliser des règles de construction de preuve. Avant de faire la preuve il faut répondre aux questions suivantes qui vont vous guider.

b) Règles de déduction de l'opérateur $\wedge$

1. De l'hypothèse $G(Paul) \wedge G(Pierre)$ que peut-on déduire sur Paul ?
   Cette règle se nomme $\wedge_{e1}$, donnez sa forme générale (sous forme de règle de déduction).

> ***Correction***
>
> $$\frac{A \wedge B}{A}\ \wedge_{e1}$$

2. Il existe une autre règle appelée $\wedge_{e2}$, donnez sa forme générale.

> ***Correction***
>
> $$\frac{A \wedge B}{B}\ \wedge_{e2}$$

3. Appliquez la règle $\wedge_{e1}$ à H_3, qu'obtient-t-on ?

> ***Correction***
>
> $$\frac{\overbrace{C(Paul) \wedge C(Pierre)}^{H_3}}{C(Paul)}\ \wedge_{e1}$$

4. Que peut-on déduire sur Paul à partir des deux déductions précédentes ?
   Cette règle se nomme $\wedge_i$, donnez sa forme générale.

> ***Correction*** *En combinant le résultats des deux déductions précédentes on déduit $G(Paul) \wedge C(Paul)$.*
>
> $$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge_i$$
>
> *Dessinez l'arbre de preuve conduisant à $G(Paul) \wedge C(Paul)$.*

5. Pour gagner de la place, on donne un nom à l'arbre de preuve qu'on vient de construire. On appelle AP_1 l'arbre de preuve constitué de l'emboîtement des trois déductions.

$$\text{NOTATION : AP}_1 \quad \frac{\overbrace{G(Paul) \wedge G(Pierre)}^{H_{2'}} \quad \overbrace{C(Paul) \wedge C(Pierre)}^{H_3}}{G(Paul) \wedge C(Paul)}$$

c) Application : démontrez $G(Pierre) \wedge C(Pierre)$. On procède de la même manière et on nomme AP_2 l'arbre de preuve obtenu.

d) Règle de déduction de l'opérateur $\Rightarrow$

1. Que peut-on déduire des hypothèses A et $A \Rightarrow B$?
2. Complétez la règle générale $\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow_e$
3. Utilisez cette règle pour déduire la conclusion $\forall x, G(x) \wedge C(x) \Rightarrow S(x)$ à partir des hypothèses H_1 et H_5. Qui joue le rôle de A ? Qui joue le rôle de B ?

e) Règle de déduction du $\forall$

1. Que peut-on déduire de la conclusion de AP_1 et de la conclusion précédente $\forall x, G(x) \wedge C(x) \Rightarrow S(x)$?
2. Que faut-il choisir comme valeur pour x pour obtenir $S(Paul)$?
3. Proposez une règle pour le «quel que soit» notée $\forall_e$.
4. En utilisant l'arbre AP_1 et les règles $\Rightarrow_e$ et $\forall_e$, construire l'arbre de preuve qui permet d'arriver à la conclusion $S(Paul)$.
5. On nomme AP_3 cet arbre de preuve. Quelles hypothèses utilise-t-il ?

$$\mathrm{AP}_3 \quad \frac{H_{2'} \quad H_3 \quad H_1 \quad H_5}{S(Paul)}$$

f) Application : sur le même modèle démontrez $S(Pierre)$ Quelle différence y a-t-il par rapport à la preuve de $S(Paul)$?
On nomme AP_4 l'arbre de preuve obtenu. Quelles hypothèses utilise-t-il ?

$$\mathrm{AP}_4 \quad \frac{H_{2'} \quad H_3 \quad H_1 \quad H_5}{S(Pierre)}$$

g) Démontrez $P(Paul) \wedge P(Pierre)$ à partir des hypothèses H_1 à H_6 de l'énoncé On cherche à construire un arbre de preuve qui comporte H_1 à H_6 en hypothèses et se conclut par $P(Paul) \wedge P(Pierre)$.

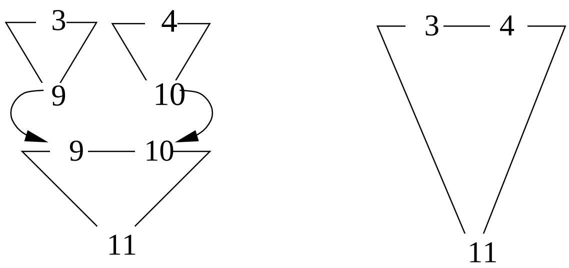
Technique On part de ce qu'on veut démontrer et on cherche qu'elles sont les règles qui peuvent amener à cette conclusion. On applique alors la règle en arrière et on remonte ainsi dans l'arbre jusqu'aux hypothèses.

Corrigé

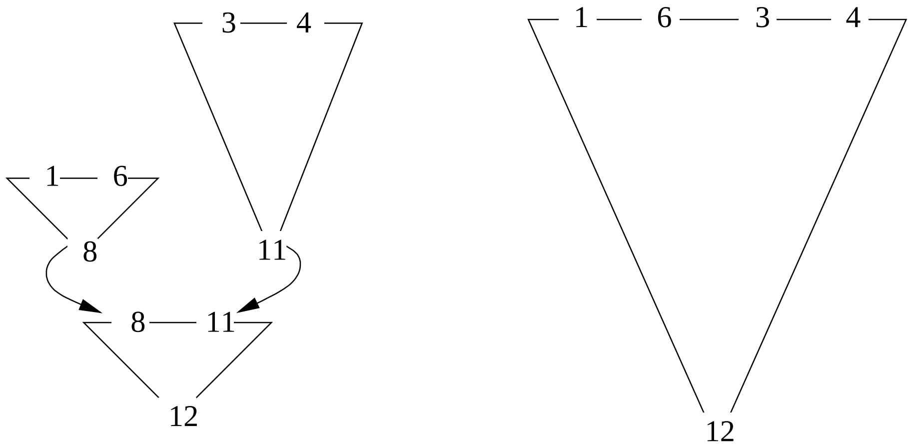
NB. Dans ce qui suit, chaque numéro représente la formule en conclusion, par exemple (8) représente la formule $\forall x, G(x) \wedge C(x) \Rightarrow S(x)$*. On présentera les déductions suivantes sous forme de petits arbres branchés les uns dans les autres, comme dans les figures suivantes (seules les premières sont dessinées).*

– De (1) et (6) on déduit : (8) $\forall x, G(x) \wedge C(x) \Rightarrow S(x)$
– De (3) on déduit : (9) $G(Paul)$
– De (4) on déduit : (10) $C(Paul)$
– De (9) et (10) on déduit : (11) $G(Paul) \wedge C(Paul)$.
– De (8) et (11) on déduit : (12) $S(Paul)$
– De (3) on déduit : (13) $G(Pierre)$
– De (4) on déduit : (14) $C(Pierre)$
– De (13) et (14) on déduit : (15) $G(Pierre) \wedge C(Pierre)$.
– De (6) et (15) on déduit : (16) $S(Pierre)$
– De (2), (12), (16) et (5) on déduit : (17) $R(Paul) \wedge R(Pierre)$
– De (17) on déduit : (18) $R(Paul)$
– De (18) et (7) on déduit : (19) $P(Paul)$
– De (17) on déduit : (20) $R(Pierre)$
– De (20) et (7) on déduit : (21) $P(Pierre)$
– De (19) et (21) on déduit : (22) $P(Paul) \wedge P(Pierre)$

Graphiquement : les arbres de preuve $3 \triangleright 9$ et $4 \triangleright 10$ se branchent dans $9, 10 \triangleright 11$ ce qui donne un arbre plus gros $3, 4 \triangleright 11$.



Ensuite l'arbre $1, 6 \triangleright 8$ se branche dans l'entrée gauche de $8, 11 \triangleright 12$, l'arbre $3, 4 \triangleright 11$ obtenu précédemment se branche dans l'entrée droite de $8, 11 \triangleright 12$, ce qui donne un arbre $1, 6, 3, 4 \triangleright 12$.



Exercice 2

Soient A, B et C trois ensembles. On suppose que $C \cap A$ est non vide, ce que nous allons exprimer en disant qu'il est habité par un élément e. On suppose par ailleurs que A est inclus dans B. Démontrer, en faisant apparaître les étapes sur un arbre, que $C \cap B$ est habité par l'élément e.

a) Formalisation des hypothèses de l'énoncé

– (H_1) $e \in C \cap A$
– (H_2) $A \subseteq B$

b) Formalisation des connaissances mathématiques sous forme de règles Vous avez le droit d'utiliser les règles $\wedge_i$, $\wedge_{e1}$, $\wedge_{e2}$, $\Rightarrow_e$ On ajoute les règles qui correspondent aux définitions mathématiques. Complétez les définitions suivantes :

– $e \in C \cap A$ équivaut à $e \in C \wedge e \in A$

Une définition produit deux règles (une pour chaque sens de l'équivalence) :

$$\frac{e \in C \cap A}{e \in C \wedge e \in A}\ D_1{\downarrow} \qquad \frac{e \in C \wedge e \in A}{e \in C \cap A}\ D_1{\uparrow}$$

– $A \subseteq B$ équivaut à $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$

Une définition produit deux règles (une pour chaque sens de l'équivalence) :

$$\frac{A \subseteq B}{\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B}\ D_2{\downarrow} \qquad \frac{\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B}{A \subseteq B}\ D_2{\uparrow}$$

c) Démonstration d'un théorème : Commencez par démontrer $e \in B$ à partir de $e \in A$ et $A \subseteq B$ en utilisant les règles précédentes. Il s'agit de construire un arbre de preuve avec pour hypothèses $e \in A$ et $A \subseteq B$ et pour conclusion $e \in B$. Donnez un nom à cet arbre, il servira dans la question suivante.

d) À l'aide des règles précédentes démontrez $e \in C \cap B$ à partir de H_1 et H_2. On part de la conclusion et on cherche les règles qui peuvent produire cette conclusion et on applique les règles en arrière jusqu'à arriver aux hypothèses H_1 et H_2.

Corrigé

On démontre que x est un élément de $C \cap B$. Comme dans l'exercice précédent, on désigne ici les formules par des numéros.

On a d'abord les deux hypothèses :

– (1) $x \in C \cap A$

– (2) $A \subseteq B$

Le raisonnement linéaire serait :

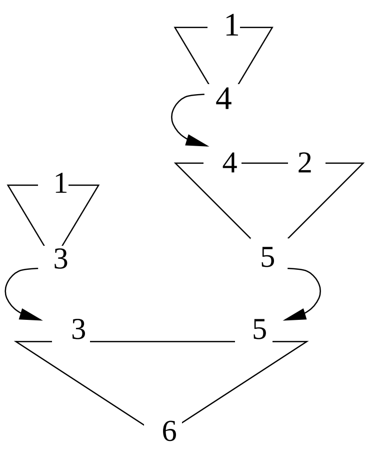
– De (1) on déduit : (3) $x \in C$

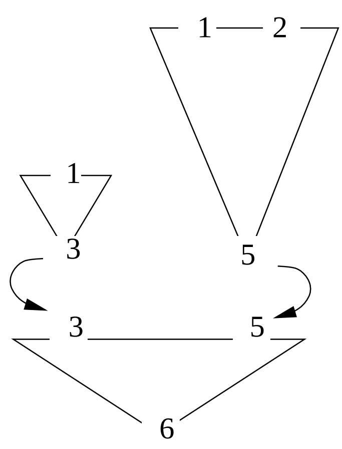
– De (1) on déduit : (4) $x \in A$

– De (4) et (2) on déduit : (5) $x \in B$

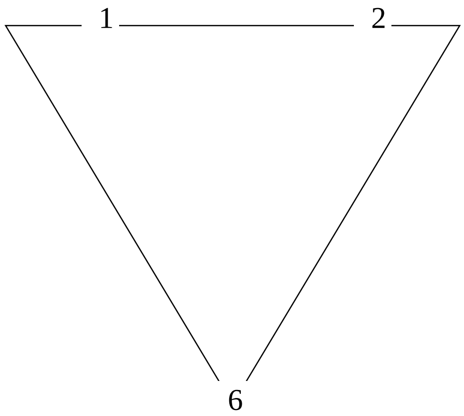
– De (3) et (5) on déduit : (6) $x \in C \cap B$

Cela se dessine ainsi (la version de droite est une vue dans laquelle on a caché certains détails de la branche droite).





L'arbre complet est donc un arbre d'hypothèses 1 et 2 et de conclusion 6, de la forme :



Remarquer que l'hypothèse 1 est utilisée deux fois à l'intérieur de la preuve. On peut le faire apparaître de la manière suivante :