

INF122 2007-2008

Examen final, session de mai

La durée prévue pour l'ensemble de l'épreuve est de 120 minutes. Les trois quarts des points sont sur la partie B. Le barème est indicatif (certains exercices sont plus difficiles et seront partiellement hors barème).

Pour tous les exercices, il s'agit de démontrer un théorème en déduction naturelle en écrivant un arbre de preuve *correct* : bien noter le nom de chacune des règles utilisées et, le cas échéant, les hypothèses levées.

On autorise (et recommande...) l'utilisation des résultats des exercices de numéro strictement inférieur au numéro de l'exercice en cours, même si ces exercices ne sont pas résolus.

Au cours de l'un des 5 premiers exercices, on admettra également le résultat suivant :

$$\overline{\overline{\forall X \forall Y \forall Z (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)}} \text{ dist}$$

Exercice 1 (1 pt)

$$\overline{\forall X \forall Y X \cap Y = Y \cap X}$$

Exercice 2 (1 pt)

$$\overline{\forall X \forall Y X \setminus Y = X \cap \overline{Y}}$$

Exercise 3 (2 pts)

$$\overline{\forall C (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)}$$

Exercise 4 (2,5 pt)

$$\overline{\forall X \forall Y X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y}$$

Exercise 5 (2 pts)

$$\overline{(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$$

Exercice 6 (3,5 pts)

Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation sur l'ensemble des entiers naturels définie par $R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 \leq n\}$ c-à-d. les paires d'entiers (m, n) telles que le carré de m est inférieur ou égal à n .

Indiquer les propriétés de la relation R en mettant des croix dans le tableau suivant :

| | oui | non |
|------------------------|-----|-----|
| réflexive | | |
| symétrique | | |
| antisymétrique | | |
| transitive | | |
| relation d'équivalence | | |
| relation d'ordre | | |

Donner la relation R^{-1} .

Donner la relation $R \circ R$.

Donner la relation $R^{-1} \circ R$.

Dans les exercices suivants on considère les listes notées comme en Caml. Les lettres u, v, w désignent toujours des listes, tandis que x, y et z désignent toujours des éléments de liste.

On énonce comme suit le principe de récurrence structurale sur les listes dont les éléments appartiennent à un ensemble A .

$$\boxed{\frac{P([]) \quad \forall u P(u) \Rightarrow \forall x P(x :: u)}{\forall u P(u)} \text{ list-rec}}$$

On rappelle également le principe de raisonnement par cas sur les entiers naturels :

$$\boxed{\frac{P(0) \quad \forall n P(S(n))}{\forall n P(n)} \text{ nat-cas}}$$

On définit l'opération `dec` comme suit :

$$\begin{aligned} \text{dec}([]) &= [] && (d_{[]}) \\ \forall u \text{dec}(0 :: u) &= \text{dec}(u) && (d_{0::}) \\ \forall n \forall u \text{dec}(S(n) :: u) &= n :: \text{dec}(l) && (d_{S::}) \end{aligned}$$

On définit l'opération `remo` comme suit :

$$\begin{aligned} \text{remo}([]) &= [] && (r_{[]}) \\ \forall u \text{remo}(0 :: u) &= \text{remo}(u) && (r_{0::}) \\ \forall n \forall u \text{remo}(S(n) :: u) &= S(n) :: \text{remo}(l) && (r_{S::}) \end{aligned}$$

On définit l'opération `inc` comme suit :

$$\begin{aligned} \text{inc}([]) &= [] && (i_{[]}) \\ \forall n \forall u \text{inc}(n :: u) &= S(n) :: \text{inc}(u) && (i_{::}) \end{aligned}$$

Exercice 7 (3 pts)

On pose $Q(u) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \text{dec}(\text{inc}(u)) = u$. D\u00e9montrer par r\u00e9currence structurelle sur u .

$$\overline{\forall u \text{ dec}(\text{inc}(u)) = u}$$

Exercice 8 (3 pts)

On pose $R(u) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \text{inc}(\text{dec}(u)) = \text{remo}(u)$. D\u00e9montrer par r\u00e9currence structurelle sur u .

$$\overline{\forall u \text{ inc}(\text{dec}(u)) = \text{remo}(u)}$$