NUMÉRO ANONYMAT ....

INF122 2007-2008

Examen final, session de mai   Corrigé

La durée prévue pour l'ensemble de l'épreuve est de 120 minutes. Les trois quarts des points sont sur la partie B. Le barème est indicatif (certains exercices sont plus difficiles et seront partiellement hors barême).

Pour tous les exercices, il s'agit de démontrer un théorème en déduction naturelle en écrivant un arbre de preuve *correct* : bien noter le nom de chacune des règles utilisées et, le cas échéant, les hypothèses levées.

On autorise (et recommande...) l'utilisation des résultats des exercices de numéro strictement inférieur au numéro de l'exercice en cours, même si ces exercices ne sont pas résolus.

Au cours de l'un des 5 premiers exercices, on admettra également le résultat suivant :

$$\boxed{\dfrac{}{\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)}\ \text{dist}}$$

Exercice 1   (1 pt)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{e \in (X \cap Y)}^{[1]}}{e \in Y}\ \cap\wedge_{\mathrm{E2}} \qquad \dfrac{\overbrace{e \in (X \cap Y)}^{[1]}}{e \in X}\ \cap\wedge_{\mathrm{E1}}}{e \in (Y \cap X)}\ \wedge_{\mathrm{I}}\cap \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{e \in (Y \cap X)}^{[2]}}{e \in X}\ \cap\wedge_{\mathrm{E2}} \qquad \dfrac{\overbrace{e \in (Y \cap X)}^{[2]}}{e \in Y}\ \cap\wedge_{\mathrm{E1}}}{e \in (X \cap Y)}\ \wedge_{\mathrm{I}}\cap}{X \cap Y = Y \cap X}\ \text{ext}[1,2]}{\forall Y\ X \cap Y = Y \cap X}\ \forall_{\mathrm{I}}}{\forall X\ \forall Y\ X \cap Y = Y \cap X}\ \forall_{\mathrm{I}}$$

Exercice 2   (1 pt)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{x \in X_0 \setminus Y_0}^{[1]}}{x \in X_0}\ \setminus\wedge_{\mathrm{E1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{x \in X_0 \setminus Y_0}^{[1]}}{\neg x \in Y_0}\ \setminus\wedge_{\mathrm{E2}}}{x \in \overline{Y_0}}\ -_{\text{déf}}}{x \in X_0 \cap \overline{Y_0}}\ \wedge_{\mathrm{I}}\cap \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{x \in X_0 \cap \overline{Y_0}}^{[2]}}{x \in X_0}\ \cap\wedge_{\mathrm{E1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{x \in X_0 \cap \overline{Y_0}}^{[2]}}{x \in \overline{Y_0}}\ \cap\wedge_{\mathrm{E2}}}{\neg x \in Y_0}\ -_{\text{déf}}}{x \in X_0\ \wedge\ \neg x \in Y_0}\ \wedge_{\mathrm{I}}}{x \in X_0 \setminus Y_0}\ \setminus_{\text{déf}}}{X_0 \setminus Y_0 = X_0 \cap \overline{Y_0}}\ \text{ext}[1,2]}{\forall Y\ X_0 \setminus Y = X_0 \cap \overline{Y}}\ \forall_{\mathrm{I}}}{\forall X\ \forall Y\ X \setminus Y = X \cap \overline{Y}}\ \forall_{\mathrm{I}}$$

Exercice 3 (2 pts)

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{ll} & (A \cup B) \setminus C \\ = & \qquad \{\text{exercice 2 avec } \frac{X}{A \cup B}\ \frac{Y}{C}\} \\ & (A \cup B) \cap \overline{C} \\ = & \qquad \{\text{dist avec } \frac{X}{A}\ \frac{Y}{B}\ \frac{Z}{\overline{C}}\} \\ & (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \\ = & \qquad \{\text{exercice 2 avec } \frac{X}{A} \text{ et } \frac{Y}{C} \text{ puis avec } \frac{X}{B} \text{ et } \frac{Y}{C}\} \\ & (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)}\,\mathcal{D}_1}{\forall C\ (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)}\,\forall_{\mathrm{I}}$$

Exercice 4 (2,5 pt)

On pose $P \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x \in X_0 \setminus (X_0 \cap Y_0)$, $\quad Q \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x \in X_0 \setminus Y_0$, $\quad R \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x \in (X_0 \cap Y_0)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P}^{[1]}}{x \in X_0}\,\setminus\wedge_{\mathrm{E1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P}^{[1]}}{R \Rightarrow \bot}\,\setminus\neg\wedge_{\mathrm{E2}} \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{P}^{[1]}}{x \in X_0}\,\setminus\wedge_{\mathrm{E1}} \quad \overbrace{x \in Y_0}^{[3]}}{x \in (X_0 \cap Y_0)}\,\wedge_{\mathrm{I}}\cap}{\bot}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{(x \in Y_0) \Rightarrow \bot}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]}{\neg(x \in Y_0)}\,\neg\ \text{déf}}{x \in X_0\ \wedge\ \neg(x \in Y_0)}\,\wedge_{\mathrm{I}}}{Q}\,\setminus\text{déf} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{Q}^{[2]}}{x \in X_0}\,\setminus\wedge_{\mathrm{E1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{Q}^{[2]}}{\neg(x \in Y_0)}\,\setminus\neg\wedge_{\mathrm{E2}} \quad \dfrac{\overbrace{R}^{[3]}}{x \in Y_0}\,\cap\wedge_{\mathrm{E2}}}{\bot}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{R \Rightarrow \bot}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]}{x \in X_0\ \wedge\ \neg(x \in X_0 \cap Y_0)}\,\wedge_{\mathrm{I}}}{x \in X_0 \setminus (X_0 \cap Y_0)}\,\setminus\text{déf}}{X_0 \setminus (X_0 \cap Y_0) = X_0 \setminus Y_0}\,\text{ext}[1,2]}{\dfrac{\forall Y\ X_0 \setminus (X_0 \cap Y) = X_0 \setminus Y}{\forall X\ \forall Y\ X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y}\,\forall_{\mathrm{I}}}\,\forall_{\mathrm{I}}$$

Variante.
Nous utilisons les arbres intermédiaires suivant :

$$
\mathcal{D}_1 \left\{
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{e \in X \setminus (X \cap Y)}^{1}$}
\dottedLine
\RightLabel{$\setminus$ déf}
\UnaryInfC{$e \in X \wedge \neg e \in (X \cap Y)$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{E1}}$}
\UnaryInfC{$e \in X$}
\AxiomC{$\overbrace{e \in X \setminus (X \cap Y)}^{1}$}
\dottedLine
\RightLabel{$\setminus$ déf}
\UnaryInfC{$e \in X \wedge \neg e \in (X \cap Y)$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{E2}}$}
\UnaryInfC{$\neg e \in (X \cap Y)$}
\dottedLine
\RightLabel{$\neg$ déf}
\UnaryInfC{$e \in (X \cap Y) \Rightarrow \bot$}
\AxiomC{$\overbrace{e \in X \setminus (X \cap Y)}^{1}$}
\dottedLine
\RightLabel{$\setminus$ déf}
\UnaryInfC{$e \in X \wedge \neg e \in (X \cap Y)$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{E1}}$}
\UnaryInfC{$e \in X$}
\AxiomC{$\overbrace{e \in Y}^{[3]}$}
\doubleLine
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{I}}\cap$}
\BinaryInfC{$e \in (X \cap Y)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{E}}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]$}
\UnaryInfC{$e \in Y \Rightarrow \bot$}
\dottedLine
\RightLabel{$\neg$ déf}
\UnaryInfC{$\neg e \in Y$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{I}}$}
\BinaryInfC{$e \in X \wedge \neg e \in Y$}
\dottedLine
\RightLabel{$\setminus$ déf}
\UnaryInfC{$e \in X \setminus Y$}
\end{prooftree}
\right.
$$

$$
\mathcal{D}_2 \left\{
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{e \in X \setminus Y}^{2}$}
\dottedLine
\RightLabel{$\setminus$ déf}
\UnaryInfC{$e \in X \wedge \neg e \in Y$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{E1}}$}
\UnaryInfC{$e \in X$}
\AxiomC{$\overbrace{e \in (X \cap Y)}^{[3]}$}
\doubleLine
\RightLabel{$\cap\wedge_{\mathrm{E2}}$}
\UnaryInfC{$e \in Y$}
\AxiomC{$\overbrace{e \in X \setminus Y}^{2}$}
\dottedLine
\RightLabel{$\setminus$ déf}
\UnaryInfC{$e \in X \wedge \neg e \in Y$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{E2}}$}
\UnaryInfC{$\neg e \in Y$}
\dottedLine
\RightLabel{$\neg$ déf}
\UnaryInfC{$e \in Y \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{E}}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[4]$}
\UnaryInfC{$e \in (X \cap Y) \Rightarrow \bot$}
\dottedLine
\RightLabel{$\neg$ déf}
\UnaryInfC{$\neg e \in (X \cap Y)$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathrm{I}}$}
\BinaryInfC{$e \in X \wedge \neg e \in (X \cap Y)$}
\dottedLine
\RightLabel{$\setminus$ déf}
\UnaryInfC{$e \in X \setminus (X \cap Y)$}
\end{prooftree}
\right.
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{e \in X \setminus (X \cap Y)}^{[1]}$}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_1$}
\UnaryInfC{$e \in X \setminus Y$}
\AxiomC{$\overbrace{e \in X \setminus Y}^{[2]}$}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_2$}
\UnaryInfC{$e \in X \setminus (X \cap Y)$}
\doubleLine
\RightLabel{ext[1,2]}
\BinaryInfC{$X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{I}}$}
\UnaryInfC{$\forall Y \; X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{I}}$}
\UnaryInfC{$\forall X \; \forall Y \; X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 5 (2 pts)

$$
\mathcal{D}_1 \left\{
\begin{array}{ll}
 & (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\
= & \qquad \{\text{exercice 3 avec } \frac{C}{A \cap B}\} \\
 & (A \setminus (A \cap B)) \,\cup\, B \setminus (A \cap B) \\
= & \qquad \{\text{exercice 4 avec } \frac{X}{A} \text{ et } \frac{Y}{B}\ \} \\
 & (A \setminus B) \,\cup\, B \setminus (A \cap B) \\
= & \qquad \{\text{exercice 1 avec } \frac{X}{A} \text{ et } \frac{Y}{B}\ \} \\
 & (A \setminus B) \,\cup\, B \setminus (B \cap A) \\
= & \qquad \{\text{exercice 4 avec } \frac{X}{B} \text{ et } \frac{Y}{A}\ \} \\
 & (A \setminus B) \,\cup\, B \setminus (A)
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_1$}
\UnaryInfC{$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \,\cup\, (B \setminus A)$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 6 (3,5 pts)

Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation sur l'ensemble des entiers naturels définie par $R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 \leq n\}$ c-à-d. les paires d'entiers (m,n) telles que le carré de m est inferieur ou equal à n.

Indiquer les propriétés de la relation R en mettant des croix dans le tableau suivant :

	oui	non
réflexive		x
symétrique		x
antisymétrique	x	
transitive	x	
relation d'équivalence		x
relation d'ordre		x

Donner la relation R^{-1}.

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n,m) \in R\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n^2 \leq m\}. \end{aligned}$$

Donner la relation $R \circ R$.

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, (m,p) \in R \wedge (p,n) \in R\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, m^2 \leq p \wedge p^2 \leq n\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^4 \leq n\} \end{aligned}$$

Donner la relation $R^{-1} \circ R$.

$$\begin{aligned} R^{-1} \circ R &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, (m,p) \in R \wedge (p,n) \in R^{-1}\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, m^2 \leq p \wedge n^2 \leq p\} \\ &= \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dans les exercices suivants on considère les listes notées comme en Caml. Les lettres u, v, w désignent toujours des listes, tandis que x, y et z désignent toujours des éléments de liste.

On énonce comme suit le principe de récurrence structurelle sur les listes dont les éléments appartiennent à un ensemble A.

$$\frac{P([]) \qquad \forall u\ P(u) \Rightarrow \forall x\ P(x :: u)}{\forall u\ P(u)}\ \textsf{list-rec}$$

On rappelle également le principe de raisonnement par cas sur les entiers naturels :

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \textsf{nat-cas}$$

On définit l'opération dec comme suit :

$$\textsf{dec}([]) = [] \tag{$d_{[]}$}$$
$$\forall u\ \textsf{dec}(0 :: u) = \textsf{dec}(u) \tag{$d_{0::}$}$$
$$\forall n\ \forall u\ \textsf{dec}(S(n) :: u) = n :: \textsf{dec}(l) \tag{$d_{s::}$}$$

On définit l'opération remo comme suit :

$$\textsf{remo}([]) = [] \tag{$r_{[]}$}$$
$$\forall u\ \textsf{remo}(0 :: u) = \textsf{remo}(u) \tag{$r_{0::}$}$$
$$\forall n\ \forall u\ \textsf{remo}(S(n) :: u) = S(n) :: \textsf{remo}(l) \tag{$r_{s::}$}$$

On définit l'opération inc comme suit :

$$\textsf{inc}([]) = [] \tag{$i_{[]}$}$$
$$\forall n\ \forall u\ \textsf{inc}(n :: u) = S(n) :: \textsf{inc}(u) \tag{$i_{::}$}$$

Exercice 7 (3 pts)

On pose $Q(u) \overset{\text{déf}}{\equiv} \mathsf{dec}(\mathsf{inc}(u)) = u$. Démontrer par récurrence structurelle sur u.

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{ll} & \mathsf{dec}(\mathsf{inc}([])) \\ = & \qquad \{i_{[]}\ \} \\ & \mathsf{dec}([]) \\ = & \qquad \{d_{[]}\} \\ & [] \end{array}\right.$$

$$\mathcal{D}_2 \left\{ \begin{array}{ll} & \mathsf{dec}(\mathsf{inc}(x_0 :: u_0)) \\ = & \qquad \{i_{::}\ \} \\ & \mathsf{dec}(S(x_0) :: \mathsf{inc}(u_0)) \\ = & \qquad \{d_{S::}\ \} \\ & x_0 :: \mathsf{dec}(\mathsf{inc}(u_0)) \\ = & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence } [\mathit{hyp\_rec}]\} \\ & x_0 :: u_0 \end{array}\right.$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_1$}
\UnaryInfC{$\mathsf{dec}(\mathsf{inc}([])) = []$}
\dottedLine
\RightLabel{Q déf}
\UnaryInfC{$Q([])$}
\AxiomC{$\overbrace{\mathsf{dec}(\mathsf{inc}(u_0)) = u_0}^{[\mathit{hyp\_rec}]}$}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_2$}
\UnaryInfC{$\mathsf{dec}(\mathsf{inc}(x_0 :: u_0)) = x_0 :: u_0$}
\dottedLine
\RightLabel{Q déf}
\UnaryInfC{$Q(x_0 :: u_0)$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{I}}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ Q(x :: u_0)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[\mathit{hyp\_rec}]$}
\UnaryInfC{$Q(u_0) \Rightarrow \forall x\ Q(x :: u_0)$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{I}}$}
\UnaryInfC{$\forall u\ Q(u) \Rightarrow \forall x\ Q(x :: u)$}
\RightLabel{$\mathsf{list\text{-}rec}$}
\BinaryInfC{$\forall u\ Q(u)$}
\dottedLine
\RightLabel{Q déf}
\UnaryInfC{$\forall u\ \mathsf{dec}(\mathsf{inc}(u)) = u$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 8 (3 pts)

On pose $R(u) \overset{\text{déf}}{\equiv} \mathsf{inc}(\mathsf{dec}(u)) = \mathsf{remo}(u)$. Démontrer par récurrence structurelle sur u.

$$\mathcal{D}_3 \left\{ \begin{array}{ll} & \mathsf{inc}(\mathsf{dec}([])) \\ = & \qquad \{d_{[]}\ \} \\ & \mathsf{inc}([]) \\ = & \qquad \{i_{[]}\} \\ & [] \\ = & \qquad \{r_{[]}\ \} \\ & \mathsf{remo}([]) \end{array}\right.$$

$$\mathcal{D}_4 \left\{ \begin{array}{ll} & \mathsf{inc}(\mathsf{dec}(0 :: u_0)) \\ = & \qquad \{d_{0::}\ \} \\ & \mathsf{inc}(\mathsf{dec}(u_0)) \\ = & \qquad \{[\mathit{hyp\_rec}]\} \\ & \mathsf{remo}(u_0) \\ = & \qquad \{r_{0::}\ \} \\ & \mathsf{remo}(0 :: u_0) \end{array}\right.$$

$$\mathcal{D}_5 \left\{ \begin{array}{ll} & \mathsf{inc}(\mathsf{dec}(S(x_0) :: u_0)) \\ = & \qquad \{d_{S::}\ \} \\ & \mathsf{inc}(x_0 :: \mathsf{dec}(u_0)) \\ = & \qquad \{i_{::}\ \} \\ & S(x_0) :: \mathsf{inc}(\mathsf{dec}(u_0)) \\ = & \qquad \{[\mathit{hyp\_rec}]\} \\ & S(x_0) :: \mathsf{remo}(u_0) \\ = & \qquad \{r_{S::}\ \} \\ & \mathsf{remo}(S(x_0) :: u_0) \end{array}\right.$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_3$}
\UnaryInfC{$\mathsf{inc}(\mathsf{dec}([])) = \mathsf{remo}([])$}
\dottedLine
\RightLabel{R déf}
\UnaryInfC{$R([])$}
\AxiomC{$\overbrace{R(u_0)}^{[\mathit{hyp\_rec}]}$}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_4$}
\UnaryInfC{$\mathsf{inc}(\mathsf{dec}(0 :: u_0)) = \mathsf{remo}(0 :: u_0)$}
\dottedLine
\RightLabel{R déf}
\UnaryInfC{$R(0 :: u_0)$}
\AxiomC{$\overbrace{R(u_0)}^{[\mathit{hyp\_rec}]}$}
\doubleLine
\RightLabel{$\mathcal{D}_5$}
\UnaryInfC{$\mathsf{inc}(\mathsf{dec}(S(x_0) :: u_0)) = \mathsf{remo}(S(x_0) :: u_0)$}
\dottedLine
\RightLabel{R déf}
\UnaryInfC{$R(S(x_0) :: u_0)$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{I}}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ R(S(x) :: u_0)$}
\RightLabel{$\mathsf{nat\text{-}cas}$}
\BinaryInfC{$\forall x\ R(x :: u_0)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[\mathit{hyp\_rec}]$}
\UnaryInfC{$R(u_0) \Rightarrow \forall x\ R(x :: u_0)$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{I}}$}
\UnaryInfC{$\forall u\ R(u) \Rightarrow \forall x\ R(x :: u)$}
\RightLabel{$\mathsf{list\text{-}rec}$}
\BinaryInfC{$\forall u\ R(u)$}
\dottedLine
\RightLabel{R déf}
\UnaryInfC{$\forall u\ \mathsf{inc}(\mathsf{dec}(u)) = \mathsf{remo}(u)$}
\end{prooftree}
$$