NOM ....
Prénom ....
GROUPE ....

INF122b 2006-2007 Devoir surveillé Corrigé

La durée prévue est de 60 minutes. Le barème est indicatif. Le dernier exercice, assez long, est en partie hors barème. Les points de bonus (au delà de 10) sont en supplément à l'attention de celles et de ceux qui aiment les défis. . .

Pour tous les exercices, il s'agit de démontrer un théorème en déduction naturelle en écrivant un arbre de preuve *correct* : bien noter le nom de chacune des règles utilisées et, le cas échéant, les hypothèses levées.

Exercice 1 (1 pt)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}^{[1]}$}
\AxiomC{$\overbrace{A}^{[3]}$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{E}}$}
\BinaryInfC{$B \Rightarrow C$}
\AxiomC{$\overbrace{B}^{[2]}$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{E}}$}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]$}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]$}
\UnaryInfC{$[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [B \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 2 (2 pts)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{(A \land B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)}^{[1]}$}
\AxiomC{$\overbrace{A}^{[3]}$}
\AxiomC{$\overbrace{B \land C}^{[2]}$}
\RightLabel{$\land_{\mathrm{E1}}$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\land_{\mathrm{I}}$}
\BinaryInfC{$A \land B$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{E}}$}
\BinaryInfC{$C \Rightarrow D$}
\AxiomC{$\overbrace{B \land C}^{[2]}$}
\RightLabel{$\land_{\mathrm{E2}}$}
\UnaryInfC{C}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{E}}$}
\BinaryInfC{D}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow D$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]$}
\UnaryInfC{$(B \land C) \Rightarrow (A \Rightarrow D)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]$}
\UnaryInfC{$[(A \land B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)] \Rightarrow [(B \land C) \Rightarrow (A \Rightarrow D)]$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 3 (2 pts)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A\lor B}^{[3]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A\Rightarrow C}^{[5]} \quad \overbrace{A}^{[1]}}{C}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{C\lor D}\lor_{\mathrm{I1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{B\Rightarrow D}^{[4]} \quad \overbrace{B}^{[2]}}{D}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{C\lor D}\lor_{\mathrm{I2}}}{C\lor D}\lor_{\mathrm{E}}[1,2]}{(A\lor B)\Rightarrow(C\lor D)}\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]}{(B\Rightarrow D)\Rightarrow(A\lor B)\Rightarrow(C\lor D)}\Rightarrow_{\mathrm{I}}[4]}{(A\Rightarrow C)\Rightarrow(B\Rightarrow D)\Rightarrow(A\lor B)\Rightarrow(C\lor D)}\Rightarrow_{\mathrm{I}}[5]$$

Exercice 4 (2 pts + 1 pt (*))

(*) Bonus de 1 point hors barème si l'arbre de preuve ne comporte pas deux sous-arbres identiques.

On prend l'abréviation $C \overset{\text{déf}}{\equiv} (A\Rightarrow A\Rightarrow B)\land\big((A\Rightarrow B)\Rightarrow A\big)$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A\Rightarrow B}^{[3]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{C}^{[1]}}{(A\Rightarrow B)\Rightarrow A}\land_{\mathrm{E2}} \quad \overbrace{A\Rightarrow B}^{[3]}}{A}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{B}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{(A\Rightarrow B)\Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{C}^{[1]}}{A\Rightarrow A\Rightarrow B}\land_{\mathrm{E1}} \quad \overbrace{A}^{[2]}}{A\Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathrm{E}} \quad \overbrace{A}^{[2]}}{B}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{A\Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]}{B}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{C\Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \;\Leftrightarrow \text{déf} \\ \big(A\Leftrightarrow (A\Rightarrow B)\big)\Rightarrow B\end{array}$$

Un cas particulier de ce théorème est celui où B est l'absurde : on obtient, par définition de $\neg$, une démonstration constructive de : $\neg(A\Leftrightarrow \neg A)$.

Exercice 5 (5 pts)

On définit les arbres de preuve auxiliaires

$$\mathcal{D}_1 : \quad \boxed{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists\, y\ Q(x,y)}^{[2]}}{P(x_0) \Rightarrow \exists\, y\ Q(x_0,y)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{x_0}) \qquad \overbrace{P(x_0)}^{[3]}}{\exists\, y\ Q(x_0,y)}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}}$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2 : \quad \boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ \forall y\ Q(x,y) \Rightarrow P(y)}^{[1]}}{\forall y\ Q(x_0,y) \Rightarrow P(y)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{x_0})}{Q(x_0,x_1) \Rightarrow P(x_1)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{y}{x_1}) \qquad \overbrace{Q(x_0,x_1)}^{[4]}}{P(x_1)}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}}$$

L'arbre complet est alors :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P(x_0)}^{[3]}\quad \overbrace{\ldots}^{[2]}}{\exists\, y\ Q(x_0,y)}\ \mathcal{D}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists\, y\ Q(x,y)}^{[2]}}{P(x_1) \Rightarrow \exists\, y\ Q(x_1,y)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{x_1}) \qquad \dfrac{\overbrace{Q(x_0,x_1)}^{[4]}\quad \overbrace{\ldots}^{[1]}}{P(x_1)}\ \mathcal{D}_2}{\exists\, y\ Q(x_1,y)}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{Q(x_0,x_1)}^{[4]} \qquad \overbrace{Q(x_1,x_2)}^{[5]}}{Q(x_0,x_1) \wedge Q(x_1,x_2)}\ \wedge_{\mathrm{I}}}{\exists\, z\ Q(x_0,x_1) \wedge Q(x_1,z)}\ \exists_{\mathrm{I}}}{\exists\, z\ Q(x_0,x_1) \wedge Q(x_1,z)}\ \exists_{\mathrm{E}}[5]}{\exists\, y\ \exists\, z\ Q(x_0,y) \wedge Q(y,z)}\ \exists_{\mathrm{I}}}{\exists\, y\ \exists\, z\ Q(x_0,y) \wedge Q(y,z)}\ \exists_{\mathrm{E}}[4]}{P(x_0) \Rightarrow \exists y \exists\, z\ Q(x_0,y) \wedge Q(y,z)}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]}{\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists y \exists\, z\ Q(x,y) \wedge Q(y,z)}\ \forall_{\mathrm{I}}}{\big(\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists\, y\ Q(x,y)\big) \Rightarrow \big(\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists y \exists\, z\ Q(x,y) \wedge Q(y,z)\big)}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]}{\big(\forall x\ \forall y\ Q(x,y) \Rightarrow P(y)\big) \Rightarrow \big(\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists\, y\ Q(x,y)\big) \Rightarrow \big(\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists y \exists\, z\ Q(x,y) \wedge Q(y,z)\big)}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]$$