INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier, Grenoble I

2007

Cours 10

Relations et fonctions

- $f \subseteq A \times B$ est une *fonction*, si pour tout $x \in A$ il existe au plus un $y \in B$ tel que xRy.

  Exemples : Pour toutes les fonctions dans les examples on suppose : $f_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{a,b,c\}$.
  - $f_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,a),(2,b)\}$ fonction
  - $f_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,a),(2,c),(1,b)\}$ pas fonction
- On écrit $f : A \to B$ au lieu de $f \subseteq A \times B$ et $f(x) = y$ au lieu de $(x,y) \in f$.
  Example : $f_1 : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ défini par $f_1(1) = a$, $f_1(2) = b$

Relations et fonctions (II)

- Une fonction f est une *application*, si pour tout $x \in A$ il existe un $y \in B$ unique tel que $f(x) = y$ (i.e. f est fonction et $\mathcal{D}(f) = A$).

  Exemples :
  - $f_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ application
  - $f_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,a),(2,b)\}$ fonction, mais pas application
  - $f_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,a),(2,c),(1,b)\}$ ni fonction, ni application

Propriétés des fonctions

- Une fonction f est *injective* (on dit aussi qu'elle est une injection), si $\forall\, x, y \in A,\ f(x) = f(y) \implies x = y$
- Une fonction f est *surjective* (on dit aussi qu'elle est une surjection), si $\forall y\ \in B \exists x \in A$ tel que $f(x) = y$ (i.e. $\mathcal{IM}(f) = B$)
- Une fonction f est *bijective* (on dit aussi qu'elle est une bijection), si elle est injective et bijective.

Théorèmes

Théorème
Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions.

- *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*
- *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
- *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Théorèmes (2)

Notation : id_A denote l'identité sur A, c'est-à-dire $\{(x,x) \mid x \in A\}$.

Théorème
Soit $f : A \to B$ une application. Il existe une application injective $g : B \to A$ telle que $g \circ f = id_A$ ssi f est bijective.

Démonstration.
On va prouver d'abord "$\Rightarrow$".
Soit $g : B \to A$ une application injective telle que $f \circ g = id_A$.
Alors $f(x_1) = f(x_2)$ implique
$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$, donc f est injective.
Soit $y \in B$ quelconque. Alors $\exists x \in A$ tel que $x = g(y)$. Donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = g(y)$, et par l'injectivité de g, on obtient $f(x) = y$. Donc f est surjective. □

Théorèmes (3)

Notation : id_A denote l'identité sur A, c'est-à-dire $\{(x,x) \mid x \in A\}$.

Théorème
Soit $f : A \to B$ une application. Il existe une application injective $g : B \to A$ telle que $g \circ f = id_A$ ssi f est bijective.

Démonstration.
On prouve "$\Leftarrow$".
Soit $g \subseteq B \times A$, définie par $g = f^{-1}$.
L'injectivité de f implique que g est une fonction : $(y, x_1) \in g$ et $(y, x_2) \in g$ impliquent $f(x_1) = y = f(x_2)$, et donc $x_1 = x_2$.
La surjectivité de f implique que g est une application : pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$, tel que $f(x) = y$, et donc $g(y) = x$.
g est injective : si $g(y_1) = x = g(y_2)$, alors $y_1 = f(x) = y_2$ et donc $y_1 = y_2$ (f est une fonction).
En plus, pour tout $x \in A$, on a $(x, f(x)) \in f$, d'où $(f(x), x) \in g$ et on obtient $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$.

Théorèmes (4)

Corollaire
Soit $f : A \to B$ une application bijective. Alors f^{-1} est une application bijective telle que $f^{-1} \circ f = id_A$ et $f \circ f^{-1} = id_B$.

Démonstration.
On a prouvé que f^{-1} est une application injective et que $f^{-1} \circ f = id_A$.
f^{-1} est surjective : comme f est une application, ,pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $(x,y) \in f$, et donc $(y,x) \in f^{-1}$.
En plus, pour tout $y \in B$, on a $(y, f^{-1}(y)) \in f^{-1}$, d'où $(f^{-1}(y), y) \in f$ et on obtient $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$. □

Théorèmes (5)

Théorème (Cantor-Bernstein)

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux applications injectives. Alors il existe une application bijective $h : A \to B$.

Théorème (Cantor)

Soit A un ensemble. Alors il n'existe pas de surjection (et donc, pas de bijection) de A vers $\mathcal{P}(A)$.

Preuve

- Supposons qu'il y ait une fonction f surjective de A vers $\mathcal{P}(A)$.
- Soit $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Donc $X \subseteq A$ et $X \in \mathcal{P}(A)$.
- A cause de la surjectivité de f, il existe x_0 tel que $f(x_0) = X$.
- On obtient : $x_0 \in f(x_0) \iff x_0 \in X \iff x_0 \notin f(x_0)$ contradiction.

Equipotence

- Soient A et B deux ensembles. A et B sont *equipotents* ssi il existe une bijection de A vers B.
- On note : $A \approx B$.
- $\approx$ est une relation d'equivalence

On peut prouver :

- $A \times B \approx B \times A$
- $(A \times B) \times C \approx A \times (B \times C)$
- $A \uplus \varnothing \approx A$
- $A \uplus B \approx B \uplus A$
- $(A \uplus B) \uplus C \approx A \uplus (B \uplus C)$
- $(A \uplus B) \times C \approx (A \times C) \uplus (B \times C)$

Ensemble infinis, dénombrables

- Un ensemble A est *infini* ssi il est équipotent à une de ses parties propres. Sinon, il est *fini*.
- L'ensemble A est appelé *dénombrable* ssi $\mathbb{N} \approx A$ ou A est fini.

Théorème

- *$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*
- *tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
- *Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
- *l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*
- *A et $\mathcal{P}(A)$ ne sont pas équipotents.*
- *$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.*

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

-

	d_1	d_2	d_3	$\cdots$	d_n	$\cdots$
r_1	3	1	1	$\cdots$	7	$\cdots$
r_2	0	1	2	$\cdots$	5	$\cdots$
r_3	4	9	0	$\cdots$	0	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
r_n	0	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

- supposons que les r_i forment la liste des réels de $(0, 1)$.
- soit r le réel tel que $r = 0, e_1 e_2 \cdots e_n \cdots$ où $e_i = d_i + 1$ si $d_i \neq 9$ et $e_i = 0$ si $d_i = 9$
- donc r n'est pas parmi les r_i ...
- donc l'ensemble des réels de $(0, 1)$ est non-dénombrable, et donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Cardinaux

- Soit A un ensemble ; le cardinal de A (noté $|A|$) est la classe d'équivalence des ensembles équipotents à A.
- $|A| + |B| \stackrel{\text{déf}}{=} |A \uplus B|$
- $|A| \cdot |B| \stackrel{\text{déf}}{=} |A \times B|$
- $|A|^{|B|} \stackrel{\text{déf}}{=} |A^B|$
- on note $|A| \leq_e |B|$ ssi il existe une injection de A dans B

On peut prouver :

- si $A \subseteq B$ alors $|A| \leq_e |B|$
- $|A| <_e |\mathcal{P}(A)|$ (conséquence du Th. de Cantor)
- $\leq_e$ est une rélation d'ordre (conséquence du Th. de Cantor-Bernstein)

Ordres

Rappel : Soit $\leq$ une relation sur A. $\leq$ est un ordre sur A ssi

1. $\leq$ est reflexive : $\forall a \in A \cdot a \leq a$.
2. $\leq$ est anti-symétrique : $\forall a, b \in A \cdot a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$.
3. $\leq$ est transitive : $\forall a, b, c \in A \cdot a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Un ordre est *total* (ou linéaire), si on a $a \leq b$ ou $b \leq a$, pour tout $a, b \in A$.
On définit : $a < b$ ssi $a \leq b \wedge a \neq b$.
Une partie de A totalement ordonnée s'appelle *une chaîne* de A.
Un ordre $\leq$ est dit *bien-fondé* s'il n'y pas de chaîne décroissante infinie $a_0 > a_1 > a_2 \cdots$.

Exemples

- $(\mathbb{N}, \leq)$ est un ordre bien-fondé.
- $\mathbb{N}^*$ doté de l'ordre lexigrographique est bien-fondé.
- $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ n'est pas un ordre bien-fondé.
- $(\mathbb{Z}, \leq)$ n'est pas un ordre bien-fondé.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ n'est pas un ordre bien-fondé.

Minorants, majorants et limites

Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné et soit $X \subseteq A$.

- $d \in X$ est un *minimum* de X, si $d \leq x$, pour tout $x \in X$
- $d \in X$ est un *maximum* de X, si $x \leq d$, pour tout $x \in X$
- d est un *minorant* de X, si d est un *minimum* de $X \cup \{d\}$
- d est un *majorant* de X, si d est un *maximum* de $X \cup \{d\}$
- d est un *infimum* de X, noté $\sqcap X$, si d est un minorant de X et pour tout minorant y on a $y \leq d$
- d est un *supremum* de X, noté $\sqcup X$, si d est un majorant de X et pour tout majorant y on a $d \leq y$

On dénote par $\perp$ et $\top$ les limites $\sqcap A$ et $\sqcup A$ quand ils existent.
Exemple :
Considérons $(2^A, \subseteq)$. Alors, $\sqcap X = \bigcap_{x \in X} x$ et $\sqcup X = \bigcup_{x \in X} x$.

Treillis

Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné.

- $(A, \leq)$ est un *treillis*, si $\sqcap X$ et $\sqcup X$ existent pour tout $X \subseteq A$ fini.
- $(A, \leq)$ est un *treillis complet*, si $\sqcap X$ et $\sqcup X$ existent pour tout $X \subseteq A$.

Exemples

1. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ est un treillis complet.
2. $(\{X \mid X \subseteq A, X \text{ fini}\}, \subseteq)$ est un treillis qui n'est pas complet, si A est infini.

Fonctions continues

Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné.
Une ω-chaîne est une chaîne dénombrable.
Definition :
Soient $(A, \leq)$ et $(A', \leq')$ deux ensembles ordonnés.

- Une fonction $f : A \longrightarrow A'$ est *monotone*, si $d_1 \leq d_2$ implique $f(d_1) \leq' f(d_2)$.
- Une fonction $f : A \longrightarrow A'$ est *continue*, si :
  1. elle est monotone et
  2. elle est $\sqcup$-additive : $f(\sqcup X) = \sqcup' f(X)$, pour toute ω-chaîne X.

Les théorèmes de Knaster-Tarski et Kleene

Les *points fixes* d'une fonction $f : A \longrightarrow A$ sont tous les éléments $x \in A$ tel que $f(x) = x$.

Deux résultats fondamentaux :

Théorème
Knaster-Tarski
Soit $(A, \leq)$ un treillis complet et $f : A \longrightarrow A$ une fonction monotone.
Alors $\sqcap\{x \mid f(x) \leq x\}$ est le plus petit point fixe de f.

Théorème
Kleene
Soit $(A, \leq)$ un treillis complet et $f : A \longrightarrow A$ une fonction continue.
Alors $\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)$ est le plus petit point fixe de f.

Preuve du Théorème de Knaster-Tarski

Soit $(A, \leq)$ un treillis complet et $f : A \longrightarrow A$ monotone. Soit $M = \{x \mid f(x) \leq x\}$ et $x_0 = \sqcap M$.

1. x_0 est un point fixe.
   1.1 On montre que si $x \in M$ alors $f(x) \in M$. Si $x \in A$ alors $f(x) \leq x$. Alors par monotonie de f, $f(f(x)) \leq f(x)$. Donc, $f(x) \in M$.
   1.2 On montre $x_0 \in M$. Par définition de x_0, pour tout $x \in M$ on a $x_0 \leq x$. Donc, par monotonie de f, pour tout $x \in M$ on a $f(x_0) \leq f(x) \leq x$. Donc, $f(x_0)$ est un minorant de M. Comme x_0 est le plus grand minorant de M, on a $f(x_0) \leq x_0$. Donc $x_0 \in M$.

   (a) et (b) implique $f(x_0) \in M$. Donc, $x_0 \leq f(x_0)$ et $f(x_0) = x_0$.
2. x_0 est le plus petit point fixe. Car tout point fixe de f est dans M et x_0 est un minorant de M.

Preuve du Théorème de Kleene

Soit $(A, \leq)$ un treillis complet et $f : A \longrightarrow A$ continue.

1. $\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)$ est un point fixe.

   $$f(\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)) = \bigsqcup_{i \geq 0} f^{i+1}(\perp) = \bigsqcup_{i \geq 1} f^i(\perp) = \perp \sqcup \bigsqcup_{i \geq 1} f^i = \bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)$$

2. $\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)$ est plus petit que tout point fixe de f.
   Soit x un point fixe. On montre par récurrence :
   $\forall i \geq 0 \cdot f^i(\perp) \leq x$. Ce qui implique $\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp) \leq x$.