# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

## Cours 9



## Parties d'un ensembles

On appelle *partie* de $A$ tout ensemble $X$ inclus dans $A$ : $X \subseteq A$.
*L'ensemble des parties* de $A$ est défini par

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Exemples

1. $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\varnothing, \{0\}\}$.
2. $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\ \varnothing,$
   $\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \cdots$
   $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \cdots$
   $\cdots$
   *trop d'éléments pour les énumérer* $\}$



## Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si $A$ contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient $2^n$ éléments.



## Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \wedge y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} = \{(0, \mathrm{a}), (0, \mathrm{b}), (1, \mathrm{a}), (1, \mathrm{b})\}$.
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.



## Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.



## Somme (union disjointe)

L'*union disjointe* (ou *somme*) de $A$ et $B$, notée $A \uplus B$ est définie par

$$A \uplus B \stackrel{\text{déf}}{=} (0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}.$$

Exemples

1. $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \uplus \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\} = \{(0, \mathrm{a}), (0, \mathrm{b}), (1, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$.
2. $\{0, 1\} \uplus \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.



## Propriétés de l'union disjointe

1. Monotonie : Si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \uplus B \subseteq C \uplus D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \uplus C = (A \uplus C) \cup (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cup B) = (C \uplus A) \cup (C \uplus B)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \uplus C = (A \uplus C) \cap (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cap B) = (C \uplus A) \cap (C \uplus B)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \uplus C = (A \uplus C) \setminus (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \setminus B) = (C \uplus A) \setminus (C \uplus B)$.
5. $A \uplus B = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $\varnothing \uplus A = A \uplus \varnothing = A$, $A \uplus B = B \uplus A$
- $(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$
- $(A \uplus B) \times C = (A \times C) \uplus (B \times C)$



## Partition d'un ensemble

On appelle *partition* de $E$ tout ensemble $\mathcal{Y}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall A\ A \in \mathcal{Y} \Rightarrow A \neq \varnothing$
2. $\forall x\ x \in E \Rightarrow \exists A\ A \in \mathcal{Y} \wedge x \in A$
3. $\forall A\ A \in \mathcal{Y} \Rightarrow \forall B\ B \in \mathcal{Y} \Rightarrow (A \neq B \iff A \cap B = \varnothing)$

Exemples

- Si l'ensemble $E$ est non vide, alors $\{E\}$ et $\{\{x\} \mid x \in E\}$ sont des partitions de $E$.
- Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors les partitions de $E$ sont $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$.

## Relations

- Une *relation* $R$ entre $A$ et $B$ est un sous-ensemble de $A \times B$.
  Exemple :
  $$R_0 \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,a,b\},\ R_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,1),(1,a),(2,a)\}.$$
- $(a,b) \in R$ est aussi noté $aRb$, ou $R(a,b)$.
  Exemple : $(1,a) \in R_0$, $(1,1) \in R_0$, $(2,1) \notin R_0$.



## Relations (II)

- Le *domaine de $R$* :
  $$\mathcal{D}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B \cdot (x,y) \in R\}$$
  Exemple : $\mathcal{D}(R_0) = \{1,2\}$.
- Le *co-domaine de $R$* (ou son image) :
  $$\mathcal{IM}(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A \cdot (x,y) \in R\}$$
  Exemple $\mathcal{IM}(R_0) = \{1,a\}$.



## Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose :
$R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est *réflexive*, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples
  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive
  - $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$ pas réflexive
- $R \subseteq A \times A$ est *transitive*, si
  $\forall x, y, z \in A \cdot (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$

  Exemples
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ transitive
  - $R_4 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3),(2,2)\}$ pas transitive



## Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est *symétrique*, si
  $\forall x, y \in A \cdot (x,y) \in R \implies (y,x) \in R$

  Exemples
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ pas symétrique
- $R \subseteq A \times A$ est *anti-symétrique*, si
  $\forall x, y \in A \cdot (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \implies y = x$

  Exemples
  - $R_7 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(3,3),(3,1),(1,3)\}$ anti-symétrique
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas anti-symétrique



## Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est *asymétrique*, si
  $\forall x, y \in A \cdot (x,y) \in R \Rightarrow \neg(y,x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique
- $R \subseteq A \times A$ est *irréflexive*, si $\forall x \in A \cdot \neg(x,x) \in R$

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3)\}$ irréflexive
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.



## Relations remarquables

- $R \subseteq A \times B$ est *totale*, si $\mathcal{D}(R) = A$
- $R \subseteq A \times A$ est une *relation d'équivalence*, si $R$ est transitive, symétrique et réflexive.
- $R \subseteq A \times A$ est un *ordre*, si $R$ est transitive, réflexive et anti-symétrique.



## Classes d'équivalence et ensemble quotient

- Soit $R \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence sur $A$. Pour chaque $x \in A$, on appelle *classe d'équivalence* de $x$ (modulo $R$) le sous-ensemble de $A$ défini par :
  $$\mathcal{C}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in A | (x,y) \in R\}$$
- Tout élément de $\mathcal{C}(x)$ est appelé *un représentant* de la classe $\mathcal{C}(x)$.
- L'ensemble des classes d'équivalence modulo $R$ se nomme *ensemble quotient* de $E$ par $R$ et se note $E/R$.



## Exemples :

- Le relation d'égalité dans un ensemble $E$ quelconque est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient $\{\{x\} \mid x \in E\}$
- Pour tout entier $n > 0$, la congruence modulo $n$ sur les entiers est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1), \ldots, \mathcal{C}(n-1)\}$.

## Théorème

### Théorème

*A toute relation $R$ d'équivalence sur $M$ correspond une partition de $M$ en classes d'équivalence, et réciproquement, toute partition de $M$ définit une relation d'équivalence dont les classes coincident avec les éléments de la partition donnée.*

### Démonstration.

On va prouver d'abord "$\Rightarrow$". Soit $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$. On montre que $\mathcal{Y}_R$ est une partition de $M$.

- Par la réflexivité de $R$, on a $\forall x \in M$, $x \in \mathcal{C}(x)$, et donc $\forall A \in \mathcal{Y}_R$, $A \neq \varnothing$.
- Par la réflexivité de $R$, on a $\forall x \in M$, $x \in \mathcal{C}(x)$, et donc $\forall x \in M$, $\exists A \in \mathcal{Y}_R$ tel que $x \in A$.



## Théorème - continuation(I)

### Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall (A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$, $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists (x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient $xRz$ et $yRz$.
  Par la symétrie de $R$, $zRx$ et ensuite par transitivité, $yRx$.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc $xRt$, et comme $yRx$, par transitivité on obtient $yRt$, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$



## Théorème - continuation(II)

### Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in M \times M$, on a $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}} \Leftrightarrow (\exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)) \Leftrightarrow (\exists P \in \mathcal{Y}, (y \in P \text{ et } x \in P)) \Leftrightarrow (y, x) \in R_{\mathcal{Y}}$
  et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est symétrique.
- Soit $((x, y), z) \in (M \times M) \times M$ tels que $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}}$ et $(y, z) \in R_{\mathcal{Y}}$. Il existe $P \in \mathcal{Y}$ et $Q \in \mathcal{Y}$ tels que $(x \in P \text{ et } y \in P)$ et $(y \in Q \text{ et } z \in Q)$. Comme $P \cap Q \neq \varnothing$ et $\mathcal{Y}$ est une partition, on a $P = Q$, donc $(x \in P \text{ et } z \in P)$, et donc $(x, z) \in R_{\mathcal{Y}}$ et on conclu que $R_{\mathcal{Y}}$ est transitive.



## Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La *composition* de $R$ et $R'$ notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

### Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$.
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$.

*L'inverse* d'une relation $R$ est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.



## Fermetures des relations

*Fermer* une relation par une propriété revient à compléter la relation pour qu'elle vérifie cette propriété.
Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

- La *fermeture réflexive* de $R$ est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui contient $R$ et qui est reflexive :
  $$(\forall x, y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x \in A \cdot xQx)$$
- La *fermeture transitive* de $R$, notée $R^+$ est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui est transitive et qui contient $R$ :
  $$(\forall x, y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x, y, z \in A \cdot xQy \wedge yQz \implies xQz)$$
- La *fermeture réflexive-transitive* est notée $R^*$. C'est la plus petite relation qui contient $R$ et qui est reflexive et transitive.



## Relations $n$-aires

$R \subseteq A \times B$ est une relation binaire.
On peut étendre cette notion aux relations $n$-aires :
$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, la relation $R$ est soit la constante vrai soit la constante faux.
- Pour $n = 1$, la relation $R$ est un sous-ensemble $A_1$ de $A$. Elle induit un *prédicat* $\mathcal{P}_{A_1}$, tel que $\mathcal{P}_{A_1}(x)$ est vrai ssi $x \in A_1$.