

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007



INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 7



Les ensembles



Plan du chapitre 1

Introduction

Motivations

Description d'ensembles

Piège

Comparaison et opérations

Comparaison d'ensembles

Opérations sur les ensembles

Définitions ensemblistes



Rôle de la théorie des ensembles

Pour les mathématiques : outil universel, fondement des différentes branches

- ▶ Georg Cantor (1845-1918) à l'origine des travaux sur la théorie des ensembles
- ▶ Zermelo (1871-1953), Fraenkel (1891-1965) et von Neumann (1903-1957) développent une théorie *axiomatique* des ensembles. Principalement en réaction au paradoxe de Russell :

$$Ru = \{X \mid X \notin X\}$$

Pour l'informatique : fournit un vocabulaire précis et des notions utilisées constamment pour décrire des données, des opérations, etc.



Théorie naïve des ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objets

- ▶ *distinguishables* les uns des autres
- ▶ telle qu'il existe un critère pour savoir si un objet *appartient* à cette collection ou pas

Notation

$x \in E$ se lit : x appartient à l'ensemble E , ou x est un *élément* de E .



Description extensionnelle

Un ensemble peut être défini de manière *extensionnelle*, par une *énumération* de ses *éléments* entre accolades.

Exemples

- ▶ $\{0\}$
- ▶ $\{3, 1, 17\}$



Remarques

- ▶ Il existe un unique ensemble à 0 élément, nommé *l'ensemble vide* et noté \emptyset
- ▶ L'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble n'est pas significatif, pas plus que la répétition d'un élément
Exemple : $\{1, 2, 4\} = \{2, 4, 1\} = \{1, 2, 1, 4, 4, 4\}$
- ▶ Les ensembles peuvent avoir des contenus hétérogènes
Exemple : $\{1, 3, 'A', \mathbb{N}, 1, 542\}$.
- ▶ Les ensembles peuvent être des éléments d'autres ensembles
Exemple : $\{1, \{1, 2, 4\}, \emptyset, \{\{1\}, 7\}, 3, 'A', \mathbb{N}, 1, 542\}$.



Et si l'ensemble est infini ?

On peut évoquer le résultat attendu, par exemple :

- ▶ $\{0, 2, 4, \dots, 2k, \dots\}$

Mais ce n'est pas rigoureux !



Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A , on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- ▶ on démontre $(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ et on prend \perp pour B
- ▶ ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $Ru = \{X \mid X \notin X\}$

L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- ▶ par définition de Ru on a : $\forall X, X \in Ru \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- ▶ donc, en particulier : $Ru \in Ru \Leftrightarrow \neg(Ru \in Ru)$;
- ▶ on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A :
 $Ru \in Ru$



Théorie axiomatique des ensembles

La véritable théorie des ensembles, sur laquelle reposent les mathématiques actuelles, énonce un certain nombre d'*axiomes* indiquant les constructions autorisées pour former des ensembles de plus en plus complexes.

Exemple : l'axiome de séparation.

Pour comprendre ces axiomes, il est nécessaire de maîtriser les notions de la théorie « naïve » des ensembles.

Pour simplifier, on utilise donc ici la version « naïve » en se munissant de précautions.



Égalité

Deux ensembles E et F sont *égaux*, noté $E=F$ si tout élément de E appartient à F et tout élément de F appartient à E :

$$E = F \Leftrightarrow \forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

Exemple

$$\{0, 2, 4\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est_pair}(n)\}$$



Description intensionnelle

Un ensemble peut aussi être défini de manière *intensionnelle*, par une *propriété* vérifiée par tous les éléments de l'ensemble (et seulement par ceux là) : $\{x \mid P(x)\}$, où P est un prédicat

Exemple

$$\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \text{est_pair}(n)\}$$

Notation

On écrit aussi $\{x \in A \mid R(x)\}$ au lieu de $\{x \mid x \in A \wedge R(x)\}$

Exemple

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$ est équivalent à $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3\}$.



Parade

Une définition intensionnelle n'est possible qu'à l'intérieur d'un ensemble déjà construit.

Axiome de séparation

Si E est un ensemble déjà construit et P est un prédicat, alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ est un nouvel ensemble.

Conséquence

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

- ▶ Si un tel ensemble T pouvait être formé, on retrouverait le paradoxe de Russell en considérant $\{x \in T \mid x \notin x\}$.



Théorie naïve prudente des ensembles

Nous supposons un univers U préalablement construit et cohérent.

La notation $\{x \mid P(x)\}$ représente désormais, implicitement :

$$\{x \in U \mid P(x)\}$$

Autrement dit : on se limite à considérer des objets (éléments, ensembles) qui sont tous des éléments de U .

En pratique U contient les entiers, les réels, etc.

Remarque

En particulier, si on écrit $\{x \in E \mid P(x)\}$, on a implicitement :

- ▶ E appartient à U : $E \in U$
- ▶ tout élément de E appartient à U : $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in U$



Inclusion

Un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F , noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=} \forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Un ensemble E est *strictement inclus* dans un ensemble F , noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \stackrel{\text{déf}}{=} E \subseteq F \wedge \exists x, x \in F \wedge x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$



Union et intersection

L'**union** (ou **réunion**) de A et de B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'**intersection** de A et de B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \emptyset$



Différence et complémentaire

La **différence A moins B** , notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le **complémentaire de A** , notée A^c (ou \bar{A}), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \stackrel{\text{déf}}{=} U \setminus A$$

Exemple : $U^c = \emptyset$



Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire \in , notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionnalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \stackrel{\text{déf}}{=} (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :

$x \in \{a\} \stackrel{\text{déf}}{=} x = a$ (singleton)

$x \in \{a_1, \dots, a_n\} \stackrel{\text{déf}}{=} x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \stackrel{\text{déf}}{=} \perp$

Complément : $x \in A \setminus B \stackrel{\text{déf}}{=} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \stackrel{\text{déf}}{=} A \subseteq B$

