INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 5

Raisonnement équationnel

Introduction : un individu t quelconque est égal à lui-même

$$\boxed{\frac{}{t = t} =_{\mathrm{I}}}$$

où t représente une constante ou une variable quelconque
(plus généralement : un terme, vu plus tard)

Élimination : principe de substitution de Leibniz
Si $a = b$, toute propriété de a est transmise à b
(on peut remplacer à volonté a par b).

$$\boxed{\frac{a = b \qquad \mathrm{P}(a)}{\mathrm{P}(b)} =_{\mathrm{E}}}$$

Propriétés de l'égalité

L'égalité est une relation réflexive
- $\forall x \;\; x = x$

L'égalité est une relation symétrique
- $\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

L'égalité est une relation transitive
- $\forall xyz \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = z \;\Rightarrow\; x = z$

Ces propriétés sont en fait des conséquences des principes d'introduction et d'élimination de l'égalité.

Exemple de raisonnement équationnel

Remarque
Si $a = b$, et si on a une propriété de a dans l'énoncé de laquelle a apparaît plusieurs fois, le principe de Leibniz permet d'inférer la propriété obtenue en remplaçant des occurrences de a par b, mais pas nécessairement toutes

Exemple
Sachant $5 = 2+3$, de $5 - 5 < 1$ on peut inférer $5 - (2+3) < 1$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires
- supposons $x = y$ .... (1)
- on sait que $x = x$ (par $=_{\mathrm{I}}$) .... (2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ .... (3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ .... (4)
et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a
$\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Présentation de preuves équationnelles

$$\mathcal{D}_i \left\{ \begin{array}{ll} & U \\ = & \quad \{\text{indication justifiant } U = V\} \\ & V \\ = & \quad \{\text{indication justifiant } V = W\} \\ & W \\ \vdots & \\ & Y \\ = & \quad \{\text{indication justifiant } Y = Z\} \\ & Z \end{array} \right.$$

Utilisation

$$\frac{}{U = Z}\,\mathcal{D}_i$$

Preuve équationnelle sous hypothèses

$$\mathcal{D}_i \left\{ \begin{array}{ll} & U \\ = & \quad \{\text{justification de } U = V \text{ sous les hypothèses } h_1 \ldots h_2\} \\ & V \\ \vdots & \\ & Y \\ = & \quad \{\text{justification de } Y = Z \text{ sous les hypothèses } h_3 \ldots h_4\} \\ & Z \end{array} \right.$$

Utilisation

$$\frac{\overbrace{}^{h_1} \ldots \overbrace{}^{h_2} \ldots \overbrace{}^{h_3} \ldots \overbrace{}^{h_4}}{U = Z}\,\mathcal{D}_i$$

Entiers et récurrence

Tous les individus considérés ici sont des entiers naturels

S est la fonction qui envoie tout entier n vers son *successeur* $n+1$

Définition des entiers naturels

- 0 est un entier naturel
- si n est un entier naturel, $S(n)$ est un entier naturel
- tous les entiers sont engendrés par application des règles précédentes (en nombre fini)

Récurrence

$$\frac{P(0) \qquad \forall n \;\; P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n \;\; P(n)}\ \text{nat-rec}$$

L'absurde

On se donne une proposition « fausse » appelée l'*absurde*, notée $\perp$

Introduction

On ne veut pas que l'absurde soit démontrable !

$\boxed{\text{Pas de règle d'introduction de } \perp}$

Élimination

De l'absurde on infère n'importe quoi

$$\frac{\perp}{C}\ \perp E$$

Peut-on démontrer l'absurde ?

Tentatives

$$\frac{\dfrac{\vdots ?}{A \wedge \perp}}{\perp}\ \wedge E_2 \qquad\qquad \frac{\dfrac{\vdots ?}{A \Rightarrow \perp} \quad \dfrac{\vdots ?}{A}}{\perp}\ \Rightarrow E$$

De telles tentatives peuvent aboutir dans un environnement comportant simultanément, par exemple, des hypothèses comme B, C $\Rightarrow \perp$, B $\Rightarrow$ A $\Rightarrow$ C, B $\Rightarrow$ A, ou tout simplement l'hypothèse $\perp$.

*Théorème de la théorie de la démonstration

L'absurde est indémontrable dans l'environnement vide

Exercices

Exercice 1

Démontrer $\perp$ sous les hypothèses B, C $\Rightarrow \perp$, B $\Rightarrow$ A $\Rightarrow$ C, B $\Rightarrow$ A.

Exercice 2

Que faut-il ajouter à l'environnement décrivant les lois du gruyère pour aboutir à l'absurde ?

- pg $\Rightarrow$ pt
- pt $\Rightarrow$ mg

La réponse doit comporter des énoncés intuitivement valides et formés seulement à partir de pg, mg et $\perp$.

La négation

La négation de A (notation $\neg$ A) est la proposition qui, en présence de A, conduit à l'absurde.

Définition

$$\boxed{\neg A \;\stackrel{\text{déf}}{\equiv}\; A \Rightarrow \perp}$$

Remarques

- la définition précédente indique que la négation de $\neg$ A est $\neg$ A $\Rightarrow \perp$, c-à-d. (A $\Rightarrow \perp$) $\Rightarrow \perp$
- en présence d'une proposition de la forme A $\Rightarrow \perp$, A aussi conduit à l'absurde