INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 3

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion))

2 possibilités : $\dfrac{A}{A \lor B}\lor I_1 \qquad \dfrac{B}{A \lor B}\lor I_2$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer A ∨ B

- on a A ∨ B
  - supposant A . . . .(n)
    on démontre C
  - supposant B . . .(m)
    on démontre C
- on infère alors C
  en levant (n) et (m)

$$\dfrac{A \lor B \qquad \begin{matrix}\overbrace{A}^{[n]}\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overbrace{B}^{[m]}\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\lor E[n,m]$$

Exemple : route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{rg \Rightarrow rd}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{rv \lor re}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{rv \Rightarrow rg}^{1} \qquad \overbrace{rv}^{[5]}}{rg}\Rightarrow E \qquad \dfrac{\overbrace{re \Rightarrow rg}^{2} \qquad \overbrace{re}^{[6]}}{rg}\Rightarrow E}{rg}\lor E[5,6]}{rd}\Rightarrow E}{(rv \lor re) \Rightarrow rd}\Rightarrow I[4]$$

Exemple : route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;
elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{rv \lor re}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{rg \Rightarrow rd}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{rv \Rightarrow rg}^{1} \qquad \overbrace{rv}^{[5]}}{rg}\Rightarrow E}{rd}\Rightarrow E \qquad \dfrac{\overbrace{rg \Rightarrow rd}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{re \Rightarrow rg}^{2} \qquad \overbrace{re}^{[6]}}{rg}\Rightarrow E}{rd}\Rightarrow E}{rd}\lor E[5,6]}{(rv \lor re) \Rightarrow rd}\Rightarrow I[4]$$

Exemple : route (4)

Si la route est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{rg \Rightarrow rd}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{rv \Rightarrow rg}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{rv \land re}^{[4]}}{rv}\land E_1}{rg}\Rightarrow E}{rd}\Rightarrow E}{(rv \land re) \Rightarrow rd}\Rightarrow I[4]$$

Commutativité de ∨ : (A ∨ B) ⇒ (B ∨ A)

On démontre B ∨ A sous l'hypothèse A ∨ B.

Pour démontrer B ∨ A
essayons une
règle d'introduction

$$\overbrace{A \lor B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{?}{A}}{B \lor A}\lor I_2}{(A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)}\Rightarrow I[1]$$

Échec

Il faut commencer
par éliminer
l'hypothèse A ∨ B

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\lor I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\lor I_1}{B \lor A}\lor E[2,3]}{(A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)}\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de ∨ (suite)

On démontre B ∨ A sous l'hypothèse A ∨ B.
Supposons A ∨ B . . . .(1)
On analyse les 2 cas possibles

$$\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\lor I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\lor I_1}{B \lor A}\lor E[2,3]$$

- supposons A . . . .(2)
  on a alors B ∨ A
- supposons B . . . .(3)
  on a alors B ∨ A

Dans chaque cas on a B ∨ A, ce qui nous a permis de déduire B ∨ A de la seule hypothèse A ∨ B. Il en résulte que A ∨ B implique B ∨ A.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\lor I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\lor I_1}{B \lor A}\lor E[2,3]}{(A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)}\Rightarrow I[1]$$

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un *prédicat* portant sur des *individus* (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - *symboles d'individus* (= de *constantes*) c, d, D35. . . ;
  - *symboles de prédicats* P, Q, . . . ;
  - étant donné un symbole de prédicat P, on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c : P(c)

Prédicats, relations

Exemple

- constantes : D35, D44, N7, N20, etc.
- prédicats : V (être verglassée), E (être enneigée), G (être glissante)
- D35v représenté par V(D35)

Généralisation

Symboles de prédicat (ou de *relation*) binaires, ternaires . . . n-aires

- va-de-à(N90, Bernin, Crolles) : la N90 va de Bernin à Crolles

Exemple : route (4)

Si la D35 est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

- V(D35) = la D35 est verglassée
- E(D35) = la D35 est enneigée
- G(D35) = la D35 est glissante
- D(D35) = la D35 est dangereuse

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathrm{G(D35)} \Rightarrow \mathrm{D(D35)}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{V(D35)} \Rightarrow \mathrm{G(D35)}}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{V(D35)} \wedge \mathrm{E(D35)}}^{[4]}}{\mathrm{V(D35)}}\,{\scriptstyle \wedge E_1}}{\mathrm{G(D35)}}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{\mathrm{D(D35)}}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{\mathrm{V(D35)} \wedge \mathrm{E(D35)} \Rightarrow \mathrm{D(D35)}}\,{\scriptstyle \Rightarrow I[4]}$$

Variable

Le raisonnement précédent peut être reproduit à l'identique en remplaçant D35 par n'importe quelle autre constante.

Variable = symbole représentant une constante non figée

Notation : x, y, z, . . .

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathrm{G}(x) \Rightarrow \mathrm{D}(x)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{V}(x) \Rightarrow \mathrm{G}(x)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{E}(x)}^{[4]}}{\mathrm{V}(x)}\,{\scriptstyle \wedge E_1}}{\mathrm{G}(x)}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{\mathrm{D}(x)}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{E}(x) \Rightarrow \mathrm{D}(x)}\,{\scriptstyle \Rightarrow I[4]}$$

On pourra *substituer* une constante à une variable dans certaines circonstances

Énoncé, formule paramétrée

Énoncé

- G(D35) : la D35 est glissante
- G(N90) : la N90 est glissante

Formule paramétrée

- G(x) : la route x est glissante

Formule universelle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\forall x\, G(x)$	– *quel que soit* x, x est glissante – *pour tout* G(x), G(x) est glissant(e) – toutes les routes sont glissantes

$\forall$ est le *quantificateur universel*

Dans $\forall x\, G(x)$, la variable x est *quantifiée universellement*

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\forall x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\forall x\, G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\forall x\, G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\forall x\, G(x) \Rightarrow \forall x\, D(x)$	$\forall x [G(x) \Rightarrow [\forall x\, D(x)]]$

Élimination (utilisation) d'une formule universelle

De $\forall x$ G(x) on peut déduire G(D35), G(N90), G(N7), . . . en substituant à x les constantes D35, N90, N7, . . .

$$\dfrac{\forall x\ \mathrm{P}(x)}{\mathrm{P}(t)}\ \forall_{E}(\tfrac{x}{t})$$

t représente une constante ou une variable

G(t) représente la formule G(x) dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x

« libre » : voir plus loin

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x$G(x) = *toutes* les routes sont glissantes
- $\forall y$G(y) = *toutes* les routes sont glissantes

→ $\forall x$G(x) et $\forall y$G(y) ont même interprétation

- De $\forall x$G(x) on peut déduire G(D35), G(N90), G(N7), . . . en substituant à x les constantes D35, N90, N7, . . .
- De $\forall y$G(y) on peut déduire G(D35), G(N90), G(N7), . . . en substituant à y les constantes D35, N90, N7, . . .

→ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x$G(x) que de $\forall y$G(y)

Introduction du quantificateur universel

Objectif :
démontrer que pour tout x, $P(x)$

Méthode :

- soit x quelconque
- on démontre $P(x)$
  attention : x doit rester quelconque, en particulier les hypothèses éventuellement faites sur x doivent être levées
- on infère $\forall x\ P(x)$

Situation fréquente

Pour tout x tel que $P(x)$, on a $Q(x)$

- soit x quelconque
  - supposons $P(x)$
  - on démontre $Q(x)$
- on infère $P(x) \Rightarrow Q(x)$
- on infère $\forall x\ [P(x) \Rightarrow Q(x)]$
  notation : $\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « » ;
  ces deux formules *dépendent de x*
  ces deux formules *sont paramétrées par x*
  x est *libre* dans ces deux formules ;
  plus précisément son *occurrence* dans $D(x)$ est libre
  (son occurrence dans $\forall x\ G(x)$ est liée)

Variable fraîche

Il arrive que l'on doive démontrer $\forall x\ P(x)$ sous des hypothèses comportant déjà des occurrences libres de x.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{H_1(x)}^{h_1}\ldots\overbrace{H_n(y)}^{h_n}\\ \vdots \\ P(\,?\,)\end{array}}{\forall x\ P(x)}\ \forall_I$$

Pour évacuer ce problème potentiel, on effectue systématiquement un renommage de x en choisissant une variable x_0 dite *fraîche* (c-à-d. non encore utilisée) :

- « soit x_0 un individu sur lequel on n'a aucune hypothèse, démontrons $P(x_0)$. »

Introduction et élimination de $\forall$

$$\boxed{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{H_1(\_)}^{h_1}\ldots\overbrace{H_n(\_)}^{h_n}\\ \vdots \\ P(x_0)\end{array}}{\forall x\ P(x)}\ \forall_I} \qquad \boxed{\dfrac{\forall x\ P(x)}{P(t)}\ \forall_E(\tfrac{x}{t})}$$

Condition d'application de $\forall_I$: x_0 ne doit être libre dans aucune des hypothèses disponibles $h_1 \ldots h_n$

Dans $\forall_E$
t représente une constante ou une variable
(dans le cas général : un terme ; *vu plus tard*)
$P(t)$ représente la formule $P(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante

Une (= toute) route glissante est dangereuse

Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Exemple : route (4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)}^{3}}{G(r_0) \Rightarrow D(r_0)}\ \forall_E(\tfrac{x}{r_0}) \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_E(\tfrac{x}{r_0}) \qquad \dfrac{\overbrace{V(r_0) \wedge E(r_0)}^{[4]}}{V(r_0)}}{G(r_0)}\ \Rightarrow_E}{D(r_0)}\ \Rightarrow_E}{V(r_0) \wedge E(r_0) \Rightarrow D(r_0)}\ \Rightarrow_I[4]}{\forall r\ V(r) \wedge E(r) \Rightarrow D(r)}\ \forall_I$$