INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 2

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Hors logique

L'interprétation des énoncés (ou de leurs constituants élémentaires) dans la réalité.
Lois de la physique, de la chimie, de la biologie, du gruyère, de l'économie...

À retenir

Arbres de preuve (ou de démonstration)

Une démonstration est essentiellement un arbre

- formé à partir de règles d'inférence et d'hypothèses
- chaque nœud est une règle d'inférence
- chaque feuille est une hypothèse
- la racine est le théorème démontré

Sélection d'un jeu de règles d'inférence

TRI, OGI, EGI, correctes mais ad-hoc
→ abandonnées dans la suite au profit d'un système bien étudié, la

déduction naturelle

Déduction naturelle

Plan du chapitre 1

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des *énoncés élémentaires* :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés *déjà construits* :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur
Pour chaque connecteur $*$, on donne

- les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : *règles d'introduction*
- les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : *règles d'élimination*

Connecteur le plus simple : la conjonction $\wedge$

$$\boxed{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathrm{I}} \qquad \boxed{\dfrac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E}_1} \qquad \boxed{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}_2}$$

Remarque : A et B représentent des énoncés quelconques (en prenant des exemplaires particuliers, on obtient une déclinaison possible de chaque règle)

Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer $B \wedge A$ à partir de $A \wedge B$

Démonstration

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\wedge\mathrm{I}$$

NB.

- l'ordre des prémisses est important
- la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ .... (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\wedge\mathrm{I}$$

Démarche

La déduction naturelle se prête à une démarche systématique pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- prendre comme *but* la conclusion désirée
- on a *fini* si le but est déjà parmi les *hypothèses*
- sinon, examiner la *forme* du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'introduction (décomposition du but)
- *recommencer* en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par décomposition d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'élimination

Rédaction a posteriori

La déduction naturelle permet de structurer la rédaction d'une démonstration, en partant du haut (feuilles) :

- il suffit de suivre les règles appliquées
- La rédaction textuelle a tendance à être peu précise
  $\longrightarrow$ connaître l'arbre de preuve aide à l'améliorer.

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\wedge\mathrm{I}$$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\Rightarrow\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?
En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$.

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer A $\Rightarrow$ C à partir de A $\Rightarrow$ B et de B $\Rightarrow$ C

- supposons A $\Rightarrow$ B ....(1)
- supposons B $\Rightarrow$ C ....(2)
- *(pour démontrer A $\Rightarrow$ C, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A ....(3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère A $\Rightarrow$ C

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\dfrac{rv \Rightarrow rg \qquad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd}\,\mathrm{TRI} \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à C mais faux à l'étape finale où l'on conclut A $\Rightarrow$ C à partir des seules hypothèses A $\Rightarrow$ B et B $\Rightarrow$ C : l'hypothèse A est « *levée* » (i.e. enlevée) au dernier stade.

Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont *disponibles*, les autres sont dites *levées* (ou *enlevées*).
On appelle *environnement* l'ensemble des hypothèses disponibles.

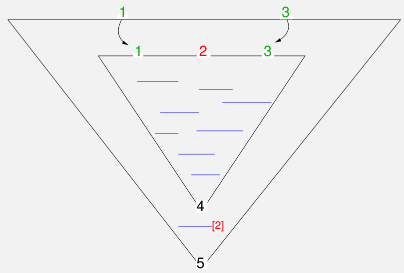
Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]
- report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[3]$$

Un arbre de preuve formalise le raisonnement

- aboutissant à la *conclusion* (formule placée à sa racine),
- sous les *hypothèses disponibles* (feuilles « encore actives »).



Formulation définitive de $\Rightarrow$ I

Ayant déduit B à partir de A

$$\begin{array}{c}\overbrace{A}^{n}\\ \vdots\\ B\end{array}$$

on infère A $\Rightarrow$ B

$$\boxed{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{A}^{[n]}\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[n]}$$

Exemple (TRI) :

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[3]$$

Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[1]$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

Notion de théorème

Définition : *un théorème est un énoncé pouvant être démontré dans l'environnement vide ; autrement dit, c'est la conclusion d'un arbre de preuve sans hypothèse (c-à-d. où toutes les feuilles correspondent à des hypothèses levées).*

Exemple : (A $\wedge$ B) $\Rightarrow$ (B $\wedge$ A) est un théorème (mais pas B $\wedge$ A)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[1]$$

Quelques théorèmes élémentaires

A $\Rightarrow$ A

$$\dfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[1] \qquad \overbrace{A}^{1} =$$ arbre de prv d'hypothèse A et de conclusion A

A $\Rightarrow$ B $\Rightarrow$ A

$$\overbrace{B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[2]$$