INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 11

Arithmétique et récurrence

Plan du chapitre

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n … considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\frac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow P(m)]\ \Rightarrow P(n)}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-recG}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

- par exemple pour déduire $P(n)$ avec $n = 3$,
  on peut utiliser non seulement $P(2)$, mais aussi $P(1)$ et $P(0)$
- le travail est le même pour $n = 0$: … il est absurde

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n *. . . considérées sont des entiers naturels*

Rappel : récurrence simple

$$\frac{P(0) \qquad \forall n \; P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n \; P(n)} \text{nat-rec}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\frac{\forall n \; [\forall m \, , \, m < n \; \Rightarrow P(m)] \; \Rightarrow P(n)}{\forall n \; P(n)} \text{nat-recG}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

- par exemple pour déduire $P(n)$ avec $n = 3$,
  on peut utiliser non seulement $P(2)$, mais aussi $P(1)$ et $P(0)$
- le travail est le même pour $n = 0$: $m < 0$ est absurde

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n ... considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\frac{\mathrm{P}(0) \qquad \forall n\ \mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{S}(n))}{\forall n\ \mathrm{P}(n)}\ \text{nat-rec}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\frac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)]\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)}{\forall n\ \mathrm{P}(n)}\ \text{nat-recG}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n ... considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\boxed{\dfrac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\boxed{\dfrac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow P(m)]\ \Rightarrow P(n)}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-recG}}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n ... considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\boxed{\dfrac{\mathsf{P}(0) \qquad \forall n\ \mathsf{P}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-rec}}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\boxed{\dfrac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)]\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-recG}}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

- par exemple pour déduire $\mathsf{P}(n)$ avec $n = 3$,
  on peut utiliser non seulement $\mathsf{P}(2)$, mais aussi $\mathsf{P}(1)$ et $\mathsf{P}(0)$
- le travail est le même pour $n = 0$: $m < 0$ est absurde

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n … considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\boxed{\dfrac{\mathsf{P}(0) \qquad \forall n\ \mathsf{P}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-rec}}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\boxed{\dfrac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)]\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-recG}}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

- par exemple pour déduire P( ) avec = 3,
  on peut utiliser non seulement P(2), mais aussi P(1) et P(0)
- le travail est le même pour = 0 : … = 0 est absurde

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n ... considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\boxed{\dfrac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\, P(n)}\ \text{nat-rec}}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\boxed{\dfrac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow P(m)]\ \Rightarrow P(n)}{\forall n\, P(n)}\ \text{nat-recG}}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n ... considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\boxed{\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\boxed{\frac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow P(m)]\ \Rightarrow P(n)}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-recG}}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

- par exemple pour déduire $P(n)$ avec $n = 3$,
  on peut utiliser non seulement $P(2)$, mais aussi $P(1)$ et $P(0)$
- le travail est le même pour $n = 0$: $m < 0$ est absurde

Récurrence forte sur les entiers

Toutes les variables m, n … considérées sont des entiers naturels

Rappel : récurrence simple

$$\boxed{\dfrac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}}$$

Récurrence forte (ou : induction complète)

$$\boxed{\dfrac{\forall n\ [\forall m\ ,\ m < n\ \Rightarrow P(m)]\ \Rightarrow P(n)}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-recG}}$$

Il s'agit d'un principe plus fort = démontrer la prémisse est plus facile :

- par exemple pour déduire $P(n)$ avec $n = 3$,
  on peut utiliser non seulement $P(2)$, mais aussi $P(1)$ et $P(0)$
- le travail est le même pour $n = 0$: $m < 0$ est absurde

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

$n - 1$

Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

n - 1
Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

n - 1
Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

n - 1

Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

$n - 1$

Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

n - 1
Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Théorème des plaquettes de chocolat

Énoncé

Prenons une plaquette de n carrés
et découpons la en suivant les rainures

En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Réponse

n - 1
Cela ne dépend pas des choix successifs de rainures !

Démonstration

Par récurrence forte

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\frac{\mathsf{P}(0) \qquad \forall n\ \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-cas}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\frac{\mathsf{P}(0) \qquad \forall n\ \mathsf{P}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n,\ n = 0\ \vee\ \exists x,\ n = \mathsf{S}(x)$

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-cas}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n,\ n = 0 \ \vee\ \exists x,\ n = S(x)$

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\boxed{\dfrac{P(0) \qquad \forall n\ P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-cas}}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\dfrac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n,\ n = 0\ \vee\ \exists x,\ n = S(x)$

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-cas}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\frac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n,\ n = 0 \ \vee\ \exists x,\ n = S(x)$

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\boxed{\dfrac{P(0) \qquad \forall n\ P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-cas}}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\dfrac{P(0) \qquad \forall n\ P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n\ P(n)}\ \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n,\ n = 0\ \vee\ \exists x,\ n = S(x)$

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\boxed{\dfrac{\mathsf{P}(0) \qquad \forall n\ \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-cas}}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\dfrac{\mathsf{P}(0) \qquad \forall n\ \mathsf{P}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))}{\forall n\ \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n,\ n = 0\ \vee\ \exists x,\ n = \mathsf{S}(x)$

- $0 = 0\ \vee\ \exists x,\ 0 = \mathsf{S}(x)$
- $\mathsf{S}(n) = 0\ \vee\ \exists x,\ \mathsf{S}(n) = \mathsf{S}(x)$

Raisonnement par cas sur les entiers

Raisonnement par cas

$$\dfrac{P(0) \qquad \forall n \; P(S(n))}{\forall n \; P(n)} \; \text{nat-cas}$$

Conséquence de la récurrence simple

$$\dfrac{P(0) \qquad \forall n \; P(n) \Rightarrow P(S(n))}{\forall n \; P(n)} \; \text{nat-rec}$$

Mais s'admet indépendamment
(il n'est pas nécessaire de répéter son application)

Exemple : $\forall n, \; n = 0 \; \vee \; \exists x, \; n = S(x)$

- $0 = 0 \; \vee \; \exists x, \, 0 = S(x)$
- $S(n) = 0 \; \vee \; \exists x, \, S(n) = S(x)$

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ . . . . (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ . . . . (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (3)

Raisonnement par cas :

- $Q(0) \Rightarrow P(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(0)$
- soit n quelconque et supposons $Q(S(n))$ . . . . (4)
  par définition de Q et sachant que $n < S(n)$, on obtient $P(n)$;
  avec (2), on obtient $P(S(n))$;
  on a donc $\forall n\ Q(S(n)) \Rightarrow P(S(n))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ .... (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ .... (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ .... (3)

Raisonnement par cas :

- $Q([illegible]) \Rightarrow P([illegible])$ en utilisant (1) et en oubliant $Q([illegible])$
- soit [illegible] quelconque et supposons $Q([illegible]([illegible]))$ .... (4)
  par définition de Q et sachant que [illegible] $<$ [illegible]([illegible]), on obtient $P([illegible])$,
  avec (2), on obtient $P([illegible]([illegible]))$,
  on a donc $\forall$ [illegible], $Q([illegible]([illegible])) \Rightarrow P([illegible]([illegible]))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ .... (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ .... (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ .... (3)

Raisonnement par cas :

- $Q(\ ) \Rightarrow P(\ )$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(\ )$
- soit quelconque et supposons $Q(\ (\ ))$ .... (4)
  par définition de Q et sachant que $<\ (\ )$, on obtient $P(\ )$;
  avec (2), on obtient $P(\ (\ ))$;
  on a donc $\forall\ ,\ Q(\ (\ )) \Rightarrow P(\ (\ ))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ . . . . (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ . . . . (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (3)

Raisonnement par cas :

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$\mathsf{P}(0)$ . . . . (1)

$\forall n,\ \mathsf{P}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))$ . . . . (2)

Posons $\mathsf{Q}(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow \mathsf{P}(m)$,

et montrons $\forall n\ \mathsf{Q}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (3)

Raisonnement par cas :

- $\mathsf{Q}(0) \Rightarrow \mathsf{P}(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $\mathsf{Q}(0)$
- soit n quelconque et supposons $\mathsf{Q}(\mathsf{S}(n))$ . . . . (4)

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte cela donne $\forall n\ \mathsf{P}(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ . . . . (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ . . . . (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (3)

Raisonnement par cas :

- $Q(0) \Rightarrow P(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(0)$
- soit n quelconque et supposons $Q(S(n))$ . . . . (4)
  par définition de Q et sachant que $n < S(n)$, on obtient $P(n)$;
  avec (2), on obtient $P(S(n))$;
  on a donc $\forall n\ , Q(S(n)) \Rightarrow P(S(n))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte
cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ .... (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ .... (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ .... (3)

Raisonnement par cas :

- $Q(0) \Rightarrow P(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(0)$
- soit n quelconque et supposons $Q(S(n))$ .... (4)
  par définition de Q et sachant que $n < S(n)$, on obtient $P(n)$;
  avec (2), on obtient $P(S(n))$;
  on a donc $\forall n,\ Q(S(n)) \Rightarrow P(S(n))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte
cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ . . . . (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ . . . . (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (3)

Raisonnement par cas :

- $Q(0) \Rightarrow P(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(0)$
- soit n quelconque et supposons $Q(S(n))$ . . . . (4)
  par définition de Q et sachant que $n < S(n)$, on obtient $P(n)$;
  avec (2), on obtient $P(S(n))$;
  on a donc $\forall n\ ,Q(S(n)) \Rightarrow P(S(n))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ . . . . (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ . . . . (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (3)

Raisonnement par cas :

- $Q(0) \Rightarrow P(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(0)$
- soit n quelconque et supposons $Q(S(n))$ . . . . (4)
  par définition de Q et sachant que $n < S(n)$, on obtient $P(n)$;
  avec (2), on obtient $P(S(n))$;
  on a donc $\forall n\ , Q(S(n)) \Rightarrow P(S(n))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte
cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence forte $\Rightarrow$ récurrence simple

Soit P un prédicat vérifiant :

$P(0)$ .... (1)

$\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$ .... (2)

Posons $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$,

et montrons $\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ .... (3)

Raisonnement par cas :

- $Q(0) \Rightarrow P(0)$ en utilisant (1) et en oubliant $Q(0)$
- soit n quelconque et supposons $Q(S(n))$ .... (4)
  par définition de Q et sachant que $n < S(n)$, on obtient $P(n)$;
  avec (2), on obtient $P(S(n))$;
  on a donc $\forall n\ , Q(S(n)) \Rightarrow P(S(n))$

En conséquence (3) est démontré, et par récurrence forte
cela donne $\forall n\ P(n)$ QED

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)$ . . . . (1)
On pose $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ Q(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $P(m)$; donc $\forall m,\ m < 0 \Rightarrow P(m)$, c-à-d. $Q(0)$
- soit n tel que $Q(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ x < n \Rightarrow P(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < S(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $P(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $P(n)$, donc $P(m)$

  on a $P(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow P(m)$ c-à-d. $Q(S(n))$

On a donc par récurrence $Q(n)$ pour tout n, et donc $P(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)$ .... (1)
On pose $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ .... (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ Q(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $P(m)$; donc $\forall m,\ m < 0 \Rightarrow P(m)$, c-à-d. $Q(0)$
- soit n tel que $Q(n)$ .... (2)
  c-à-d. $\forall x,\ x < n \Rightarrow P(x)$ .... (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < S(n)$ .... (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ .... (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $P(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $P(n)$, donc $P(m)$

  on a $P(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow P(m)$ c-à-d. $Q(S(n))$

On a donc par récurrence $Q(n)$ pour tout n, et donc $P(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)$ . . . . (1)
On pose $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ Q(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $P(m)$; donc $\forall m,\ m < 0 \Rightarrow P(m)$, c-à-d. $Q(0)$
- soit n tel que $Q(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ x < n \Rightarrow P(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < S(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $P(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $P(n)$, donc $P(m)$

  on a $P(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow P(m)$ c-à-d. $Q(S(n))$

On a donc par récurrence $Q(n)$ pour tout n, et donc $P(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n \Rightarrow \mathsf{P}(m)] \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathsf{Q}(n) \ \overset{\text{déf}}{\equiv}\ \forall m,\ \ m < n \Rightarrow \mathsf{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathsf{Q}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathsf{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathsf{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0 \Rightarrow \mathsf{P}(m)$, c-à-d. $\mathsf{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathsf{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n \Rightarrow \mathsf{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathsf{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \lor m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathsf{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathsf{P}(n)$, donc $\mathsf{P}(m)$

  on a $\mathsf{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathsf{P}(m)$ c-à-d. $\mathsf{Q}(\mathsf{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathsf{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathsf{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)]\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathsf{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathsf{Q}(n)\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathsf{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathsf{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$, c-à-d. $\mathsf{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathsf{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathsf{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathsf{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathsf{P}(n)$, donc $\mathsf{P}(m)$

  on a $\mathsf{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathsf{P}(m)$ c-à-d. $\mathsf{Q}(\mathsf{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathsf{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathsf{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)]\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n)\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)] \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n) \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \forall m,\ \ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)]\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1)
On pose $\mathsf{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ \ \mathsf{Q}(n)\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathsf{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathsf{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$, c-à-d. $\mathsf{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathsf{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathsf{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathsf{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathsf{P}(n)$, donc $\mathsf{P}(m)$

  on a $\mathsf{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathsf{P}(m)$ c-à-d. $\mathsf{Q}(\mathsf{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathsf{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathsf{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)]\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n)\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)]\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n)\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n \ \Rightarrow \mathsf{P}(m)] \ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathsf{Q}(n) \ \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \ \forall m,\ \ m < n \ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathsf{Q}(n) \ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathsf{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathsf{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0 \ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$, c-à-d. $\mathsf{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathsf{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n \ \Rightarrow \mathsf{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathsf{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathsf{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathsf{P}(n)$, donc $\mathsf{P}(m)$

  on a $\mathsf{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathsf{P}(m)$ c-à-d. $\mathsf{Q}(\mathsf{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathsf{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathsf{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)] \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \forall m,\ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ m < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ x < n \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow P(m)]\ \Rightarrow P(n)$ . . . . (1)
On pose $Q(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow P(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ Q(n)\ \Rightarrow P(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ Q(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $P(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow P(m)$, c-à-d. $Q(0)$
- soit n tel que $Q(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow P(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < S(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $P(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $P(n)$, donc $P(m)$

  on a $P(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow P(m)$ c-à-d. $Q(S(n))$

On a donc par récurrence $Q(n)$ pour tout n, et donc $P(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)]\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n)\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)]\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ .... (1)
On pose $\mathrm{Q}(n)\ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ \mathrm{Q}(n)\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ .... (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ .... (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ .... (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ .... (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ .... (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)] \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n) \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=}\ \forall m,\ \ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)]\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1)
On pose $\mathsf{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ \mathsf{Q}(n)\ \Rightarrow \mathsf{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathsf{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathsf{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathsf{P}(m)$, c-à-d. $\mathsf{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathsf{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathsf{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathsf{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathsf{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathsf{P}(n)$, donc $\mathsf{P}(m)$

  on a $\mathsf{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathsf{P}(m)$ c-à-d. $\mathsf{Q}(\mathsf{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathsf{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathsf{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)]\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)

On pose $\mathrm{Q}(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ \mathrm{Q}(n)\ \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)$ . . . . (1)
On pose $Q(n) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \forall m,\ m < n \Rightarrow P(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ Q(n) \Rightarrow P(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ Q(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $P(m)$; donc $\forall m,\ m < 0 \Rightarrow P(m)$, c-à-d. $Q(0)$
- soit n tel que $Q(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ x < n \Rightarrow P(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < S(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $P(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $P(n)$, donc $P(m)$

  on a $P(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow P(m)$ c-à-d. $Q(S(n))$

On a donc par récurrence $Q(n)$ pour tout n, et donc $P(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :

$\forall n\ [\forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow P(m)]\ \Rightarrow P(n)$ . . . . (1)

On pose $Q(n)\ \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ \ \forall m,\ \ m < n\ \Rightarrow P(m)$; (1) se réécrit :

$\forall n\ Q(n)\ \Rightarrow P(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ Q(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $P(m)$; donc $\forall m,\ \ m < 0\ \Rightarrow P(m)$, c-à-d. $Q(0)$
- soit n tel que $Q(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ \ x < n\ \Rightarrow P(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < S(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $P(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $P(n)$, donc $P(m)$

  on a $P(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow P(m)$ c-à-d. $Q(S(n))$

On a donc par récurrence $Q(n)$ pour tout n, et donc $P(n)$ par (1')

Récurrence simple $\Rightarrow$ récurrence forte

Soit P un prédicat vérifiant :
$\forall n\ [\forall m,\ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)] \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1)
On pose $\mathrm{Q}(n) \overset{\text{déf}}{\equiv} \forall m,\ m < n \Rightarrow \mathrm{P}(m)$; (1) se réécrit :
$\forall n\ \mathrm{Q}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n)$ . . . . (1')

Démontrons par récurrence simple : $\forall n\ \mathrm{Q}(n)$

- soit m un entier naturel tel que $m < 0$, cela est absurde, ce qui donne en particulier $\mathrm{P}(m)$; donc $\forall m,\ m < 0 \Rightarrow \mathrm{P}(m)$, c-à-d. $\mathrm{Q}(0)$
- soit n tel que $\mathrm{Q}(n)$ . . . . (2)
  c-à-d. $\forall x,\ x < n \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ . . . . (2')
  soit m un entier naturel tel que $m < \mathrm{S}(n)$ . . . . (3)
  (3) entraîne $m < n \vee m = n$ . . . . (4)
  - si $m < n$, on a grâce à (2') : $\mathrm{P}(m)$
  - si $m = n$: (1') et (2) donnent $\mathrm{P}(n)$, donc $\mathrm{P}(m)$

  on a $\mathrm{P}(m)$ dans chaque cas de (4), donc (3) $\Rightarrow \mathrm{P}(m)$ c-à-d. $\mathrm{Q}(\mathrm{S}(n))$

On a donc par récurrence $\mathrm{Q}(n)$ pour tout n, et donc $\mathrm{P}(n)$ par (1')

Plan du chapitre

Raisonnements par récurrence structurelle

Récurrence sur les listes

P est un prédicat arbitraire sur les listes

$$\frac{\mathsf{P}([\,]) \qquad \forall x\ \forall l\ \ \mathsf{P}(l) \Rightarrow \mathsf{P}(x :: l)}{\forall l\ \ \mathsf{P}(l)}$$

Récurrence sur les arbres binaires

P est un prédicat arbitraire sur les arbres binaires

$$\frac{\mathsf{P}(\mathsf{F}) \qquad \forall g\ \forall x\ \forall d\ \ \mathsf{P}(g) \Rightarrow \mathsf{P}(d) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{N}(g,x,d))}{\forall a\ \ \mathsf{P}(a)}$$

Rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ se lit $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Ceci se généralise à tous les types inductifs

Raisonnements par récurrence structurelle

Récurrence sur les listes

P est un prédicat arbitraire sur les listes

$$\frac{\mathrm{P}([]) \qquad \forall x\ \forall l\ \ \mathrm{P}(l) \Rightarrow \mathrm{P}(x :: l)}{\forall l\ \ \mathrm{P}(l)}$$

Récurrence sur les arbres binaires

P est un prédicat arbitraire sur les arbres binaires

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{F}) \qquad \forall g\ \forall x\ \forall d\ \ \mathrm{P}(g) \Rightarrow \mathrm{P}(d) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{N}(g,x,d))}{\forall a\ \ \mathrm{P}(a)}$$

Rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ se lit $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Ceci se généralise à tous les types inductifs

Raisonnements par récurrence structurelle

Récurrence sur les listes

P est un prédicat arbitraire sur les listes

$$\boxed{\frac{P([]) \qquad \forall x\ \forall l\ \ P(l)\ \Rightarrow P(x :: l)}{\forall l\ \ P(l)}}$$

Récurrence sur les arbres binaires

P est un prédicat arbitraire sur les arbres binaires

$$\boxed{\frac{P(F) \qquad \forall g\ \forall x\ \forall d\ \ P(g)\ \Rightarrow P(d)\ \Rightarrow P(N(g,x,d))}{\forall a\ \ P(a)}}$$

Rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ se lit $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Ceci se généralise à tous les types inductifs

Raisonnements par récurrence structurelle

Récurrence sur les listes

P est un prédicat arbitraire sur les listes

$$\frac{P([\,]) \qquad \forall x\ \forall l\ \ P(l) \Rightarrow P(x :: l)}{\forall l\ \ P(l)}$$

Récurrence sur les arbres binaires

P est un prédicat arbitraire sur les arbres binaires

$$\frac{P(F) \qquad \forall g\ \forall x\ \forall d\ \ P(g) \Rightarrow P(d) \Rightarrow P(N(g,x,d))}{\forall a\ \ P(a)}$$

Rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ se lit $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Ceci se généralise à tous les types inductifs

Raisonnements par récurrence structurelle

Récurrence sur les listes

P est un prédicat arbitraire sur les listes

$$\frac{P([]) \qquad \forall x\ \forall l\ \ P(l) \Rightarrow P(x :: l)}{\forall l\ \ P(l)}$$

Récurrence sur les arbres binaires

P est un prédicat arbitraire sur les arbres binaires

$$\frac{P(F) \qquad \forall g\ \forall x\ \forall d\ \ P(g) \Rightarrow P(d) \Rightarrow P(N(g,x,d))}{\forall a\ \ P(a)}$$

Rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ *se lit* $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Ceci se généralise à tous les types inductifs

Raisonnements par récurrence structurelle

Récurrence sur les listes

P est un prédicat arbitraire sur les listes

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{P}([]) \qquad \forall x\ \forall l\ \ \mathrm{P}(l) \Rightarrow \mathrm{P}(x :: l)}{\forall l\ \ \mathrm{P}(l)}}$$

Récurrence sur les arbres binaires

P est un prédicat arbitraire sur les arbres binaires

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{F}) \qquad \forall g\ \forall x\ \forall d\ \ \mathrm{P}(g) \Rightarrow \mathrm{P}(d) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{N}(g,x,d))}{\forall a\ \ \mathrm{P}(a)}}$$

Rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ *se lit* $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Ceci se généralise à tous les types inductifs

Exemple : bégaiement et longueur

```
let rec begaie = function
  | [] → []
  | x :: l → x :: x :: begaie l
```

Conjecture : le bégaiement double la longueur
$\forall l \;\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

```
let rec longueur = function
  | [] → 0
  | x :: l → 1 + longueur l
```

On pose $P(l) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

Montrons $\forall l \;\; P(l)$ par récurrence structurelle sur l

Exemple : bégaiement et longueur

$$
\begin{array}{l}
\text{let rec begaie} = \text{function} \\
\quad \mid [\,] \rightarrow [\,] \\
\quad \mid x :: l \rightarrow x :: x :: \text{begaie } l
\end{array}
$$

Conjecture : le bégaiement double la longueur
$\forall l \;\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

$$
\begin{array}{l}
\text{let rec longueur} = \text{function} \\
\quad \mid [\,] \rightarrow 0 \\
\quad \mid x :: l \rightarrow 1 + \text{longueur } l
\end{array}
$$

On pose $P(l) \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

Montrons $\forall l \;\; P(l)$ par récurrence structurelle sur l

Exemple : bégaiement et longueur

```
let rec begaie = function
    | [] → []
    | x :: l → x :: x :: begaie l
```

Conjecture : le bégaiement double la longueur

$\forall l \;\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

```
let rec longueur = function
    | [] → 0
    | x :: l → 1 + longueur l
```

On pose $P(l) \;\overset{\text{déf}}{=}\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

Montrons $\forall l \;\; P(l)$ par récurrence structurelle sur l

Exemple : bégaiement et longueur

```
let rec begaie = function
  | [] → []
  | x :: l → x :: x :: begaie l
```

Conjecture : le bégaiement double la longueur

$\forall l \;\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

```
let rec longueur = function
  | [] → 0
  | x :: l → 1 + longueur l
```

On pose $P(l) \overset{\text{déf}}{=} \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

Montrons $\forall l \;\; P(l)$ par récurrence structurelle sur l

Exemple : bégaiement et longueur

$$\begin{array}{l} \text{let rec begaie} = \text{function} \\ \quad \mid [] \rightarrow [] \\ \quad \mid x :: l \rightarrow x :: x :: \text{begaie } l \end{array}$$

Conjecture : le bégaiement double la longueur

$\forall l \;\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

$$\begin{array}{l} \text{let rec longueur} = \text{function} \\ \quad \mid [] \rightarrow 0 \\ \quad \mid x :: l \rightarrow 1 + \text{longueur } l \end{array}$$

On pose $P(l) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

Montrons $\forall l \;\; P(l)$ par récurrence structurelle sur l

Exemple : bégaiement et longueur

```
let rec begaie = function
    | [] → []
    | x :: l → x :: x :: begaie l
```

Conjecture : le bégaiement double la longueur

$\forall l \;\; \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{longueur } l$

```
let rec longueur = function
    | [] → 0
    | x :: l → 1 + longueur l
```

On pose $P(l) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \text{longueur (begaie } l) = 2 \times \text{ longueur } l$

Montrons $\forall l \;\; P(l)$ par récurrence structurelle sur l

Cas de base

$$
\mathcal{D}_0 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie []\!)} \\
= & \quad \{\text{définition de begaie}\} \\
 & \text{longueur ([]\!)} \\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 0 \\
= & \quad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times 0 \\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 2 \times \text{longueur []}
\end{array}
\right.
$$

Cas de base

$$
\mathcal{D}_0 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie } [\,]) \\
= & \quad \{\text{définition de begaie }\} \\
 & \text{longueur } ([\,]) \\
= & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 0 \\
= & \quad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times 0 \\
= & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 2 \times \text{longueur } [\,]
\end{array}
\right.
$$

Cas de base

$$
\mathcal{D}_0 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie [])} \\
= & \quad \{\text{définition de begaie}\} \\
 & \text{longueur ([])} \\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 0 \\
= & \quad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times 0 \\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 2 \times \text{longueur []}
\end{array}
\right.
$$

Cas de base

$$\mathcal{D}_0 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{longueur (begaie [])} \\ = & \quad \{\text{définition de begaie}\} \\ & \text{longueur ([])} \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 0 \\ = & \quad \{\text{arithmétique}\} \\ & 2 \times 0 \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 2 \times \text{longueur []} \end{array} \right.$$

Cas de base

$$\mathcal{D}_0 \left\{ \begin{array}{ll}
 & \mathsf{longueur}\ (\mathsf{begaie}\ [\,]) \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{begaie}\ \} \\
 & \mathsf{longueur}\ ([\,]) \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{longueur}\ \} \\
 & 0 \\
= & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times 0 \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{longueur}\ \} \\
 & 2 \times \mathsf{longueur}\ [\,]
\end{array} \right.$$

Cas de base

$$
\mathcal{D}_0 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{longueur}\ (\mathsf{begaie}\ [\,]) \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{begaie}\ \} \\
 & \mathsf{longueur}\ ([\,]) \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{longueur}\ \} \\
 & 0 \\
= & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times 0 \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{longueur}\ \} \\
 & 2 \times \mathsf{longueur}\ [\,]
\end{array}
\right.
$$

Cas de base

$$
\mathcal{D}_0 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{longueur}\ (\mathsf{begaie}\ [\,]) \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{begaie}\ \} \\
 & \mathsf{longueur}\ ([\,]) \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{longueur}\ \} \\
 & 0 \\
= & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times 0 \\
= & \qquad \{\text{définition de } \mathsf{longueur}\ \} \\
 & 2 \times \mathsf{longueur}\ [\,]
\end{array}
\right.
$$

Cas de base

$$
\mathcal{D}_0 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur}\ (\text{begaie}\ [\,])\\
= & \quad \{\text{définition de begaie}\ \}\\
 & \text{longueur}\ ([\,])\\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\ \}\\
 & 0\\
= & \quad \{\text{arithmétique}\}\\
 & 2 \times 0\\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\ \}\\
 & 2 \times \text{longueur}\ [\,]
\end{array}
\right.
$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$\mathcal{D}_1$

longueur (begaie ($x_0 :: l_0$))
= {définition de begaie}
longueur(:: :: begaie)
= {définition de longueur}
1 + longueur (:: begaie)
= {définition de longueur}
1 + 1 + longueur (begaie)
= {hypothèse de récurrence }
1 + 1 + 2 × longueur
= {arithmétique}
2 × (1 + longueur)
= {définition de longueur}
2 × (longueur (::))

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec $\text{hrec} \overset{\text{déf}}{=\!=} \text{longueur}\ (\text{begaie}\ l_0) = 2 \times \text{longueur}\ l_0$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\ = & \quad \{\text{définition de begaie}\} \\ & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\ & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\ = & \quad \{\text{arithmétique}\} \\ & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\ & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0)) \end{array} \right.$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$
\mathcal{D}_1 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\
= & \quad \{\text{définition de begaie}\} \\
 & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\
= & \quad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\
 & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\
= & \quad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\
= & \quad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0))
\end{array}
\right.
$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$
\mathcal{D}_1 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\
= & \qquad \{\text{définition de begaie }\} \\
 & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\
 & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\
= & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0))
\end{array}
\right.
$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\ = & \quad \{\text{définition de begaie }\} \\ & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\ = & \quad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\ & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\ = & \quad \{\text{arithmétique}\} \\ & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\ = & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0)) \end{array} \right.$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$
\mathcal{D}_1 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\
= & \qquad \{\text{définition de begaie }\} \\
 & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\
 & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\
= & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0))
\end{array}
\right.
$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$
\mathcal{D}_1 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\
= & \qquad \{\text{définition de begaie}\} \\
 & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\
= & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\
 & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\
= & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\
= & \qquad \{\text{définition de longueur}\} \\
 & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0))
\end{array}
\right.
$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$
\mathcal{D}_1 \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\
= & \quad \{\text{définition de begaie }\} \\
 & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\
= & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\
= & \quad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\
 & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\
= & \quad \{\text{arithmétique}\} \\
 & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\
= & \quad \{\text{définition de longueur }\} \\
 & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0))
\end{array}
\right.
$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\ = & \qquad \{\text{définition de begaie }\} \\ & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\ = & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\ & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\ = & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\ & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\ = & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0)) \end{array} \right.$$

Pas de récurrence

Soient l_0 et x_0 quelconques vérifiant l'hypothèse de récurrence $\overbrace{\text{hrec}}^{1}$
avec hrec $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ longueur (begaie l_0) $= 2 \times$ longueur l_0

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) \\ = & \qquad \{\text{définition de begaie }\} \\ & \text{longueur}(x_0 :: x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 1 + \text{longueur } (x_0 :: \text{begaie } l_0) \\ = & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 1 + 1 + \text{longueur (begaie } l_0) \\ = & \qquad \{\text{hypothèse de récurrence } 1\} \\ & 1 + 1 + 2 \times \text{longueur } l_0 \\ = & \qquad \{\text{arithmétique}\} \\ & 2 \times (1 + \text{longueur } l_0) \\ = & \qquad \{\text{définition de longueur }\} \\ & 2 \times (\text{longueur } (x_0 :: l_0)) \end{array} \right.$$

Assemblage (préparation)

Case de base

$$\dfrac{}{\text{longueur}\ (\text{begaie}\ [\,]) = 2 \times (\text{longueur}\ [\,])}\ \mathcal{D}_0$$

$$\dfrac{\text{longueur}\ (\text{begaie}\ [\,]) = 2 \times (\text{longueur}\ [\,])}{\mathsf{P}\ ([\,])}$$

Pas de récurrence

$$\dfrac{\overbrace{\mathsf{P}(l_0)}^{1}}{\text{hrec}}$$

$$\dfrac{\text{hrec}}{\text{longueur}\ (\text{begaie}\ (x_0 :: l_0)) = 2 \times \text{longueur}\ (x_0 :: l_0)}\ \mathcal{D}_1$$

$$\dfrac{\text{longueur}\ (\text{begaie}\ (x_0 :: l_0)) = 2 \times \text{longueur}\ (x_0 :: l_0)}{\mathsf{P}\ (x_0 :: l_0)}$$

Assemblage (préparation)

Case de base

$$\dfrac{\dfrac{}{\text{longueur (begaie [])} = 2 \times (\text{longueur []})}\,\mathcal{D}_0}{\text{P ([])}}$$

Pas de récurrence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\text{P}(l_0)}^{1}}{\text{hrec}}}{\text{longueur (begaie } (x_0 :: l_0)) = 2 \times \text{longueur } (x_0 :: l_0)}\,\mathcal{D}_1}{\text{P } (x_0 :: l_0)}$$

Assemblage final

$$
\dfrac{\dfrac{}{P\ ([])}\ \mathcal{D}_0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P(l_0)}^{[1]}}{P\ (x_0 :: l_0)}\ \mathcal{D}_1}{P\ (l_0)\ \Rightarrow P\ (x_0 :: l_0))}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1]}{\forall l\ \ P\ (l)\ \Rightarrow P\ (x_0 :: l)}\ \forall_{\mathrm{I}}}{\forall x\ \ \forall l\ \ P\ (l)\ \Rightarrow P\ (x :: l)}\ \forall_{\mathrm{I}}}{\forall l\ \ P(l)}
$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
  | F → 1
  | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
  | F → 0
  | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $P(a) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

  $$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \;\text{ et }\; \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

  $$\begin{aligned}\text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) \qquad \textit{(hyps r} \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\ &= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $\text{P}(a) \;\; \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; \text{P}(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) && \textit{(hyps r} \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a\ \ \text{nbf}\ a = \text{nbc}\ a + 1$

On pose $P(a) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{nbf}\ a = \text{nbc}\ a + 1$

Montrons $\forall a\ \ P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf}\ F = 1 = 0 + 1 = \text{nbc}\ F + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf}\ g_0 = \text{nbc}\ g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf}\ d_0 = \text{nbc}\ g_0 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{nbf}\ N(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf}\ g_0 + \text{nbf}\ d_0 \\ &= (\text{nbc}\ g_0 + 1) + (\text{nbc}\ d_0 + 1) && \textit{(hyps r} \\ &= (\text{nbc}\ g_0 + 1 + \text{nbc}\ d_0) + 1 \\ &= (\text{nbc}\ N(g_0, x_0, d_0)) + 1 \end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $P(a) \;\; \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) && \textit{(hyps r} \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
  | F → 1
  | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
  | F → 0
  | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $P(a) \overset{\text{déf}}{=\!=} \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) && \textit{(hyps r} \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
  | F → 1
  | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
  | F → 0
  | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a$ nbf a = nbc a + 1

On pose $P(a) \overset{\text{déf}}{=}$ nbf a = nbc a + 1

Montrons $\forall a\ P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- nbf F = 1 = 0 + 1 = nbc F + 1
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

  $$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

  $$\begin{aligned} \text{nbf } N(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) && \textit{(hyps r} \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\ &= (\text{nbc } N(g_0, x_0, d_0)) + 1 \end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

$$\begin{array}{ll}
\text{let rec nbf} = \text{function} & \text{let rec nbc} = \text{function} \\
\quad \mid \mathsf{F} \rightarrow 1 & \quad \mid \mathsf{F} \rightarrow 0 \\
\quad \mid \mathsf{N}(\mathrm{g}, \mathrm{x}, \mathrm{d}) \rightarrow \text{nbf g} + \text{nbf d} & \quad \mid \mathsf{N}(\mathrm{g}, \mathrm{x}, \mathrm{d}) \rightarrow \text{nbc g} + 1 + \text{nbc d}
\end{array}$$

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $\mathsf{P}(a) \;\overset{\text{déf}}{=\!=}\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; \mathsf{P}(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf } \mathsf{F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc } \mathsf{F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf } \mathsf{N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) && \textit{(hyps r} \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc } \mathsf{N}(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $P(a) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) \qquad \textit{(hyps r} \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf}\ a = \text{nbc}\ a + 1$

On pose $P(a) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \text{nbf}\ a = \text{nbc}\ a + 1$

Montrons $\forall a \;\; P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf}\ F = 1 = 0 + 1 = \text{nbc}\ F + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf}\ g_0 = \text{nbc}\ g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf}\ d_0 = \text{nbc}\ g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf}\ N(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf}\ g_0 + \text{nbf}\ d_0 \\
&= (\text{nbc}\ g_0 + 1) + (\text{nbc}\ d_0 + 1) \qquad \textit{(hyps r} \\
&= (\text{nbc}\ g_0 + 1 + \text{nbc}\ d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc}\ N(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a\;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $P(a) \overset{\text{déf}}{=\!=} \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a\;\; P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) && \textit{(hyps r} \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\ &= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1 \end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $\text{P}(a) \;\; \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; \text{P}(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) && \text{(hyps r} \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

let rec nbf = function
  | F → 1
  | N(g, x, d) → nbf g + nbf d

let rec nbc = function
  | F → 0
  | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d

Conjecture : $\forall a \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

On pose $\text{P}(a) \;\; \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \;\; \text{nbf } a = \text{nbc } a + 1$

Montrons $\forall a \;\; \text{P}(a)$ par récurrence structurelle sur a

- $\text{nbf F} = 1 = 0 + 1 = \text{nbc F} + 1$
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

$$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{nbf N}(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) \qquad (hyps\ r \\
&= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\
&= (\text{nbc N}(g_0, x_0, d_0)) + 1
\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
  | F → 1
  | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
  | F → 0
  | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a$ nbf a = nbc a + 1

On pose $P(a) \stackrel{\text{déf}}{=}$ nbf a = nbc a + 1

Montrons $\forall a\ P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- nbf F = 1 = 0 + 1 = nbc F + 1
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

  $$\text{nbf } g_0 = \text{nbc } g_0 + 1 \quad \text{et} \quad \text{nbf } d_0 = \text{nbc } g_0 + 1$$

  $$\begin{aligned} \text{nbf } N(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) \qquad \textit{(hyps r} \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\ &= (\text{nbc } N(g_0, x_0, d_0)) + 1 \end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

```
let rec nbf = function
    | F → 1
    | N(g, x, d) → nbf g + nbf d
```

```
let rec nbc = function
    | F → 0
    | N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d
```

Conjecture : $\forall a$ nbf a = nbc a + 1

On pose $P(a) \stackrel{\text{déf}}{=}$ nbf a = nbc a + 1

Montrons $\forall a\ P(a)$ par récurrence structurelle sur a

- nbf F = 1 = 0 + 1 = nbc F + 1
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

  nbf g_0 = nbc g_0 + 1 et nbf d_0 = nbc g_0 + 1

  $$\begin{aligned}\text{nbf } N(g_0, x_0, d_0) &= \text{nbf } g_0 + \text{nbf } d_0 \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1) + (\text{nbc } d_0 + 1) \quad \textit{(hyps r} \\ &= (\text{nbc } g_0 + 1 + \text{nbc } d_0) + 1 \\ &= (\text{nbc } N(g_0, x_0, d_0)) + 1\end{aligned}$$

Exemple : nombre de feuilles et de clés

let rec nbf = function
| F → 1
| N(g, x, d) → nbf g + nbf d

let rec nbc = function
| F → 0
| N(g, x, d) → nbc g + 1 + nbc d

Conjecture : $\forall a$ nbf a = nbc a + 1

On pose P(a) $\stackrel{\text{déf}}{=\!=}$ nbf a = nbc a + 1

Montrons $\forall a$ P(a) par récurrence structurelle sur a

- nbf F = 1 = 0 + 1 = nbc F + 1
- Soient g_0, x_0 et d_0 quelconques vérifiant les hypothèses de récurrence :

  nbf g_0 = nbc g_0 + 1 et nbf d_0 = nbc g_0 + 1

  nbf N(g_0, x_0, d_0) = nbf g_0 + nbf d_0
  = (nbc g_0 + 1) + (nbc d_0 + 1) *(hyps r*
  = (nbc g_0 + 1 + nbc d_0) + 1
  = (nbc N(g_0, x_0, d_0)) + 1