INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 9

Plan du chapitre

Parties d'un ensembles

On appelle partie de A tout ensemble X inclus dans A : $X \subseteq A$.
L'ensemble des parties de A est défini par

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Exemples

1. $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$.
2. $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{ \emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \dots \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots \dots$ *trop d'éléments pour les énumérer* $\}$

Parties d'un ensembles

On appelle partie de A tout ensemble X inclus dans A : $X \subseteq A$.
L'ensemble des parties de A est défini par

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Exemples

1. $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\varnothing, \{0\}\}$.
2. $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{ \varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \cdots \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \cdots \cdots$ *trop d'éléments pour les énumérer* $\}$

Parties d'un ensembles

On appelle partie de A tout ensemble X inclus dans A : $X \subseteq A$.
L'ensemble des parties de A est défini par

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Exemples

1. $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\varnothing, \{0\}\}$.
2. $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{ \varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \cdots \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \cdots \cdots$ *trop d'éléments pour les énumérer* $\}$

Parties d'un ensembles

On appelle partie de A tout ensemble X inclus dans A : $X \subseteq A$.
L'ensemble des parties de A est défini par

$$\mathcal{P}(A) \overset{\text{déf}}{=\!=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Exemples

1. $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\varnothing, \{0\}\}$.
2. $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{ \quad \varnothing,$
   $\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \cdots$
   $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \cdots$
   $\ldots$
   trop d'éléments pour les énumérer $\}$

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\cdot)$

1. $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.
3. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$.
4. $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff x \in A$.
5. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.
6. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.
7. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
8. En général, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.
9. Si A contient $n \in \mathbb{N}$ éléments distincts alors $\mathcal{P}(A)$ contient 2^n éléments.

Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$.
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.

Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \overset{\text{déf}}{=\!=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$.
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.

Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$

Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$.
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.

Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \overset{\text{déf}}{=\!=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$.
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.

Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$.
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.

Produit cartésien

Couple

$$(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On peut montrer

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \land y = y'.$$

Produit cartésien

$$A \times B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}.$$

Exemples :

1. $\{0, 1\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$.
2. $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Propriétés du produit cartésien

1. Monotonie du produit cartésien :
   si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

Somme (union disjointe)

L'union disjointe (ou somme) de A et B, notée $A \uplus B$ est définie par

$$A \uplus B \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ (0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}.$$

Exemples

1. $\{a, b\} \uplus \{a, c\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, c)\}.$
2. $\{0, 1\} \uplus \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$

Somme (union disjointe)

L'union disjointe (ou somme) de A et B, notée $A \uplus B$ est définie par

$$A \uplus B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} (0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}.$$

Exemples

1. $\{a, b\} \uplus \{a, c\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, c)\}$.
2. $\{0, 1\} \uplus \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Somme (union disjointe)

L'union disjointe (ou somme) de A et B, notée $A \uplus B$ est définie par

$$A \uplus B \stackrel{\text{déf}}{=} (0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}.$$

Exemples

1. $\{a, b\} \uplus \{a, c\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, c)\}$.
2. $\{0, 1\} \uplus \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Propriétés de l'union disjointe

1. Monotonie : Si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \uplus B \subseteq C \uplus D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \uplus C = (A \uplus C) \cup (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cup B) = (C \uplus A) \cup (C \uplus B)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \uplus C = (A \uplus C) \cap (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cap B) = (C \uplus A) \cap (C \uplus B)$.
4. $\backslash$-Distributivité : $(A \setminus B) \uplus C = (A \uplus C) \setminus (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \setminus B) = (C \uplus A) \setminus (C \uplus B)$.
5. $A \uplus B = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $\emptyset \uplus A = A \uplus \emptyset = A$, $A \uplus B = B \uplus A$
- $(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$
- $(A \uplus B) \times C = (A \times C) \uplus (B \times C)$

Propriétés de l'union disjointe

1. Monotonie : Si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \uplus B \subseteq C \uplus D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \uplus C = (A \uplus C) \cup (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cup B) = (C \uplus A) \cup (C \uplus B)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \uplus C = (A \uplus C) \cap (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cap B) = (C \uplus A) \cap (C \uplus B)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \uplus C = (A \uplus C) \setminus (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \setminus B) = (C \uplus A) \setminus (C \uplus B)$.
5. $A \uplus B = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $\emptyset \uplus A = A \uplus \emptyset = A$, $A \uplus B = B \uplus A$
- $(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$
- $(A \uplus B) \times C = (A \times C) \uplus (B \times C)$

Propriétés de l'union disjointe

1. Monotonie : Si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \uplus B \subseteq C \uplus D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \uplus C = (A \uplus C) \cup (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cup B) = (C \uplus A) \cup (C \uplus B)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \uplus C = (A \uplus C) \cap (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cap B) = (C \uplus A) \cap (C \uplus B)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \uplus C = (A \uplus C) \setminus (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \setminus B) = (C \uplus A) \setminus (C \uplus B)$.
5. $A \uplus B = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $\emptyset \uplus A = A \uplus \emptyset = A$, $A \uplus B = B \uplus A$
- $(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$
- $(A \uplus B) \times C = (A \times C) \uplus (B \times C)$

Propriétés de l'union disjointe

1. Monotonie : Si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \uplus B \subseteq C \uplus D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \uplus C = (A \uplus C) \cup (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cup B) = (C \uplus A) \cup (C \uplus B)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \uplus C = (A \uplus C) \cap (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \cap B) = (C \uplus A) \cap (C \uplus B)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \uplus C = (A \uplus C) \setminus (B \uplus C)$ et $C \uplus (A \setminus B) = (C \uplus A) \setminus (C \uplus B)$.
5. $A \uplus B = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$.

En général, les propriétés suivantes sont fausses :

- $\varnothing \uplus A = A \uplus \varnothing = A$, $A \uplus B = B \uplus A$
- $(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$
- $(A \uplus B) \times C = (A \times C) \uplus (B \times C)$

Partition d'un ensemble

On appelle partition de E tout ensemble $\mathcal{Y}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \Rightarrow A \neq \varnothing$
2. $\forall x \; x \in E \Rightarrow \exists A \; A \in \mathcal{Y} \wedge x \in A$
3. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \Rightarrow \forall B \; B \in \mathcal{Y} \Rightarrow (A \neq B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing)$

Exemples

Partition d'un ensemble

On appelle partition de E tout ensemble $\mathcal{Y}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \;\Rightarrow\; A \neq \varnothing$
2. $\forall x \; x \in E \;\Rightarrow\; \exists A \; A \in \mathcal{Y} \wedge x \in A$
3. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \;\Rightarrow\; \forall B \; B \in \mathcal{Y} \;\Rightarrow\; (A \neq B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing)$

Exemples

- Si l'ensemble [illegible] est non vide, alors $\{$ [illegible] $\}$ et $\{\{$ [illegible] $\} \mid$ [illegible] $\in$ [illegible] $\}$ sont des partitions de [illegible].
- Si [illegible] $= \{1, 2, 3\}$ alors les partitions de [illegible] sont $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$

Partition d'un ensemble

On appelle partition de E tout ensemble $\mathcal{Y}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \Rightarrow \; A \neq \emptyset$
2. $\forall x \; x \in E \Rightarrow \; \exists A \; A \in \mathcal{Y} \wedge x \in A$
3. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \Rightarrow \; \forall B \; B \in \mathcal{Y} \Rightarrow \; (A \neq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset)$

Exemples

Partition d'un ensemble

On appelle partition de E tout ensemble $\mathcal{Y}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \Rightarrow A \neq \emptyset$
2. $\forall x \; x \in E \Rightarrow \exists A \; A \in \mathcal{Y} \land x \in A$
3. $\forall A \; A \in \mathcal{Y} \Rightarrow \forall B \; B \in \mathcal{Y} \Rightarrow (A \neq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset)$

Exemples

Partition d'un ensemble

On appelle partition de E tout ensemble $\mathcal{Y}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall A\ A \in \mathcal{Y} \Rightarrow\ A \neq \varnothing$
2. $\forall x\ x \in E \Rightarrow\ \exists A\ A \in \mathcal{Y} \wedge x \in A$
3. $\forall A\ A \in \mathcal{Y} \Rightarrow\ \forall B\ B \in \mathcal{Y} \Rightarrow\ (A \neq B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing)$

Exemples

- Si l'ensemble E est non vide, alors $\{E\}$ et $\{\{x\} \mid x \in E\}$ sont des partitions de E.
- Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors les partitions de E sont $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$.

Partition d'un ensemble

On appelle partition de E tout ensemble $\mathcal{Y}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall A\ A \in \mathcal{Y} \Rightarrow\ A \neq \emptyset$
2. $\forall x\ x \in E \Rightarrow\ \exists A\ A \in \mathcal{Y} \wedge x \in A$
3. $\forall A\ A \in \mathcal{Y} \Rightarrow\ \forall B\ B \in \mathcal{Y} \Rightarrow\ (A \neq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset)$

Exemples

- Si l'ensemble E est non vide, alors $\{E\}$ et $\{\{x\} \mid x \in E\}$ sont des partitions de E.
- Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors les partitions de E sont $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$.

Plan du chapitre

Relations

Définitions

Propriétés

Ensemble quotient

Fermetures

Relations

- Une relation R entre A et B est un sous-ensemble de $A \times B$.
  Exemple :

$$R_0 \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, a, b\}, \quad R_0 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 1), (1, a), (2, a)\}.$$

Relations

- Une relation R entre A et B est un sous-ensemble de $A \times B$.
  Exemple :

$$R_0 \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \quad R_0 \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 1), (1, \mathrm{a}), (2, \mathrm{a})\}.$$

Relations

- Une relation R entre A et B est un sous-ensemble de $A \times B$.
  Exemple :
  $$R_0 \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, a, b\}, \; R_0 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 1), (1, a), (2, a)\}.$$
- $(a, b) \in R$ est aussi noté aRb, ou $R(a, b)$.
  Exemple : $(1, a) \in R_0$, $(1, 1) \in R_0$, $(2, 1) \notin R_0$.

Relations (II)

- Le **domaine de** R :

$$\mathcal{D}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B \cdot (x, y) \in R\}$$

Exemple : $\mathcal{D}(R_0) = \{1, 2\}$.

Relations (II)

- Le domaine de R :

$$\mathcal{D}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B \cdot (x, y) \in R\}$$

Exemple : $\mathcal{D}(R_0) = \{1, 2\}$.

Relations (II)

- Le domaine de R :

$$\mathcal{D}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B \cdot (x, y) \in R\}$$

Exemple : $\mathcal{D}(R_0) = \{1, 2\}$.

- Le co-domaine de R (ou son image) :

$$\mathcal{IM}(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A \cdot (x, y) \in R\}$$

Exemple $\mathcal{IM}(R_0) = \{1, a\}$.

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose : $R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose : $R_i \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x, x) \in R$.

  Exemples

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose : $R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose : $R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \ \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose :
$R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive
  - $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(2,1),(3,3)\}$ pas réflexive

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose :
$R_i \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x, x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ réflexive
  - $R_2 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$ pas réflexive

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose : $R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive
  - $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$ pas réflexive

- $R \subseteq A \times A$ est transitive, si $\forall x, y, z \in A \cdot (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$

  Exemples

  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$ transitive
  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3),(2,2)\}$ pas transitive

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose : $R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est **réflexive**, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive
  - $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$ pas réflexive

- $R \subseteq A \times A$ est **transitive**, si
  $\forall x, y, z \in A \cdot (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$

  Exemples

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose :
$R_i \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x, x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ réflexive
  - $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$ pas réflexive

- $R \subseteq A \times A$ est transitive, si
  $\forall x, y, z \in A \cdot (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$

  Exemples

  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ transitive
  - $\stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, 2), (2, 3), (2, 2)\}$ pas transitive

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose : $R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est **réflexive**, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive
  - $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$ pas réflexive

- $R \subseteq A \times A$ est **transitive**, si $\forall x, y, z \in A \cdot (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$

  Exemples

  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ transitive
  - $\stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3),(2,2)\}$ pas transitive

Réflexivité, transitivité

Pour toutes les relations dans les examples on suppose :
$R_i \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

- $R \subseteq A \times A$ est réflexive, si $\forall x \in A \cdot (x,x) \in R$.

  Exemples

  - $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ réflexive
  - $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$ pas réflexive

- $R \subseteq A \times A$ est transitive, si
  $\forall x, y, z \in A \cdot (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$

  Exemples

  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ transitive
  - $R_4 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3),(2,2)\}$ pas transitive

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  ## Exemples

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples

  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est **symétrique**, si
  $\forall x\,, y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)\}$ symétrique

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x \, , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ pas symétrique

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\,, y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  ## Exemples

  - $R_5 \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique
  - $R_3 \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ pas symétrique

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)\}$ symétrique
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ pas symétrique
- $R \subseteq A \times A$ est anti-symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies y = x$

  Exemples

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples

  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{\equiv} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{\equiv} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ pas symétrique

- $R \subseteq A \times A$ est anti-symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies y = x$

  Exemples

  - $\stackrel{\text{déf}}{\equiv} \{(1,2),(2,1),(1,1),(3,3),(3,1),(1,3)\}$ anti-symétrique
  - $\stackrel{\text{déf}}{\equiv} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas anti-symétrique

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples

  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ pas symétrique

- $R \subseteq A \times A$ est anti-symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies y = x$

  Exemples

  - $R_7 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(3,3),(3,1),(1,3)\}$ anti-symétrique
  - $\stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas anti-symétrique

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ pas symétrique
- $R \subseteq A \times A$ est anti-symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies y = x$

  Exemples
  - $R_7 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(3,3),(3,1),(1,3)\}$
    anti-symétrique

Symétrie

- $R \subseteq A \times A$ est symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$

  Exemples

  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ symétrique
  - $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ pas symétrique

- $R \subseteq A \times A$ est anti-symétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies y = x$

  Exemples

  - $R_7 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(3,3),(3,1),(1,3)\}$ anti-symétrique
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas anti-symétrique

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \Rightarrow \neg(y, x) \in R$.

  Exemples

  - $\stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $\stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique

- $\subseteq \times$ est irréflexive, si $\forall \in \cdot \neg(,) \in$

  Exemples

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \Rightarrow \neg(y, x) \in R$.

  Exemples

  - $\stackrel{def}{=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $\stackrel{def}{=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique

- $\subseteq \times$ est irréflexive, si $\forall \in \cdot \neg(,) \in$

  Exemples

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \;\Rightarrow\; \neg(y, x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $\stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique

- $\subseteq \ \times$ est irréflexive, si $\forall \ \in \ \neg(\ ) \in$

  Exemples

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x \, , y \in A \cdot (x, y) \in R \Rightarrow \neg(y, x) \in R$.

  Exemples

  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3)\}$ asymétrique

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \;\Rightarrow\; \neg(y, x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique
- $\subseteq \times$ est irréflexive, si $\forall \in \neg(\ ) \in$

  Exemples

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x, y \in A \cdot (x, y) \in R \Rightarrow \neg(y, x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique

- $\subseteq \; \times$ est irréflexive, si $\forall \; \in \; \neg(\;) \in$

  Exemples

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x, y \in A \cdot (x, y) \in R \Rightarrow \neg (y, x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique
- $R \subseteq A \times A$ est irréflexive, si $\forall x \in A \cdot \neg (x, x) \in R$

  Exemples
  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3)\}$ irréflexive
  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \ \Rightarrow\ \neg(y, x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ pas asymétrique
- $R \subseteq A \times A$ est irréflexive, si $\forall x\ \in A \cdot \neg(x, x) \in R$

  Exemples
  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3)\}$ irréflexive
  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \Rightarrow \neg(y, x) \in R$.

  Exemples

  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique

- $R \subseteq A \times A$ est irréflexive, si $\forall x\ \in A \cdot \neg(x, x) \in R$

  Exemples

  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3)\}$ irréflexive
  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si
  $\forall x, y \in A \cdot (x, y) \in R \Rightarrow \neg(y, x) \in R.$

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique
- $R \subseteq A \times A$ est irréflexive, si $\forall x \in A \cdot \neg(x, x) \in R$

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,3)\}$ irréflexive
  - $\stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \ \Rightarrow\ \neg(y, x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ pas asymétrique

- $R \subseteq A \times A$ est irréflexive, si $\forall x\ \in A \cdot \neg(x, x) \in R$

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3)\}$ irréflexive
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \ \Rightarrow\ \neg(y, x) \in R$.

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ pas asymétrique
- $R \subseteq A \times A$ est irréflexive, si $\forall x\ \in A \cdot \neg(x, x) \in R$

  Exemples
  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,3)\}$ irréflexive
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Autres propriétés

- $R \subseteq A \times A$ est asymétrique, si $\forall x\ , y \in A \cdot (x, y) \in R \ \Rightarrow\ \neg(y, x) \in R$.

  Exemples

  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3)\}$ asymétrique
  - $R_9 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ pas asymétrique

- $R \subseteq A \times A$ est irréflexive, si $\forall x\ \in A \cdot \neg(x, x) \in R$

  Exemples

  - $R_8 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 3)\}$ irréflexive
  - $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)\}$ pas irréflexive

Remarque : Une relation irréflexive et transitive est forcément asymétrique.

Relations remarquables

- $R \subseteq A \times B$ est totale, si $\mathcal{D}(R) = A$

Relations remarquables

- $R \subseteq A \times B$ est **totale**, si $\mathcal{D}(R) = A$
- $\subseteq \times$ est une relation d'équivalence, si est transitive, symétrique et réflexive.
- $\subseteq \times$ est un ordre, si est transitive, réflexive et anti-symétrique

Relations remarquables

- $R \subseteq A \times B$ est totale, si $\mathcal{D}(R) = A$
- $R \subseteq A \times A$ est une relation d'équivalence, si R est transitive, symétrique et réflexive.

Relations remarquables

- $R \subseteq A \times B$ est **totale**, si $\mathcal{D}(R) = A$
- $R \subseteq A \times A$ est une **relation d'équivalence**, si R est transitive, symétrique et réflexive.
- $\subseteq \times$ est un ordre, si est transitive, réflexive et anti-symétrique.

Relations remarquables

- $R \subseteq A \times B$ est totale, si $\mathcal{D}(R) = A$
- $R \subseteq A \times A$ est une relation d'équivalence, si R est transitive, symétrique et réflexive.
- $R \subseteq A \times A$ est un ordre, si R est transitive, réflexive et anti-symétrique.

Classes d'équivalence et ensemble quotient

- Soit $R \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence sur A. Pour chaque $x \in A$, on appelle classe d'équivalence de x (modulo R) le sous-ensemble de A défini par :

$$\mathcal{C}(x) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{y \in A | (x, y) \in R\}$$

- Tout élément de $\mathcal{C}(x)$ est appelé un représentant de la classe $\mathcal{C}(x)$.
- L'ensemble des classes d'équivalence modulo R se nomme ensemble quotient de E par R et se note E/R.

Classes d'équivalence et ensemble quotient

- Soit $R \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence sur A. Pour chaque $x \in A$, on appelle classe d'équivalence de x (modulo R) le sous-ensemble de A défini par :

$$\mathcal{C}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in A | (x, y) \in R\}$$

- Tout élément de $\mathcal{C}(x)$ est appelé un représentant de la classe $\mathcal{C}(x)$.
- L'ensemble des classes d'équivalence modulo R se nomme ensemble quotient de E par R et se note E/R.

Classes d'équivalence et ensemble quotient

- Soit $R \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence sur A. Pour chaque $x \in A$, on appelle classe d'équivalence de x (modulo R) le sous-ensemble de A défini par :

$$\mathcal{C}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in A | (x, y) \in R\}$$

- Tout élément de $\mathcal{C}(x)$ est appelé un représentant de la classe $\mathcal{C}(x)$.
- L'ensemble des classes d'équivalence modulo R se nomme ensemble quotient de E par R et se note E/R.

Exemples :

- Le relation d'égalité dans un ensemble E quelconque est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient $\{\{x\} \mid x \in E\}$
- Pour tout entier $n > 0$, la congruence modulo n sur les entiers est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1), \ldots, \mathcal{C}(n-1)\}$.

Exemples :

- Le relation d'égalité dans un ensemble E quelconque est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient $\{\{x\} \mid x \in E\}\}$
- Pour tout entier $n > 0$, la congruence modulo n sur les entiers est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1), \ldots, \mathcal{C}(n-1)\}$.

Théorème

Théorème

A toute relation R d'équivalence sur M correspond une partition de M en classes d'équivalence, et réciproquement, toute partition de M définit une relation d'équivalence dont les classes coincident avec les éléments de la partition donnée.

Démonstration.

On va prouver d'abord " $\Rightarrow$ ". Soit $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$. On montre que $\mathcal{Y}_R$ est une partition de M.

Théorème

Théorème

A toute relation R d'équivalence sur M correspond une partition de M en classes d'équivalence, et réciproquement, toute partition de M définit une relation d'équivalence dont les classes coincident avec les éléments de la partition donnée.

Démonstration.

On va prouver d'abord " $\Rightarrow$ ". Soit $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$. On montre que $\mathcal{Y}_R$ est une partition de M.

- Par la réflexivité de R, on a $\forall x \in M$, $x \in \mathcal{C}(x)$, et donc $\forall A \in \mathcal{Y}_R$, $A \neq \varnothing$.

Théorème

Théorème

A toute relation R d'équivalence sur M correspond une partition de M en classes d'équivalence, et réciproquement, toute partition de M définit une relation d'équivalence dont les classes coincident avec les éléments de la partition donnée.

Démonstration.

On va prouver d'abord " $\Rightarrow$ ". Soit $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$. On montre que $\mathcal{Y}_R$ est une partition de M.

- Par la réflexivité de R, on a $\forall x \in M$, $x \in \mathcal{C}(x)$, et donc $\forall A \in \mathcal{Y}_R$, $A \neq \varnothing$.

Théorème

Théorème

A toute relation R d'équivalence sur M correspond une partition de M en classes d'équivalence, et réciproquement, toute partition de M définit une relation d'équivalence dont les classes coincident avec les éléments de la partition donnée.

Démonstration.

On va prouver d'abord " $\Rightarrow$ ". Soit $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$. On montre que $\mathcal{Y}_R$ est une partition de M.

- Par la réflexivité de R, on a $\forall x \in M$, $x \in \mathcal{C}(x)$, et donc $\forall A \in \mathcal{Y}_R$, $A \neq \varnothing$.
- Par la réflexivité de R, on a $\forall x \in M$, $x \in \mathcal{C}(x)$, et donc $\forall x \in M$, $\exists A \in \mathcal{Y}_R$ tel que $x \in A$.

Théorème - continuation(I)

Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R,\ A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists(x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient xRz et yRz.
  Par la symétrie de R, zRx et ensuite par transitivité, yRx.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc xRt, et comme yRx, par transitivité on obtient yRt, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$

Théorème - continuation(I)

Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall (A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$, $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists (x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient xRz et yRz.
  Par la symétrie de R, zRx et ensuite par transitivité, yRx.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc xRt, et comme yRx, par transitivité on obtient yRt, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$

Théorème - continuation(I)

Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R,\ A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists(x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient xRz et yRz.
  Par la symétrie de R, zRx et ensuite par transitivité, yRx.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc xRt, et comme yRx, par transitivité on obtient yRt, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$

Théorème - continuation(I)

Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall (A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R,\ A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists (x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient xRz et yRz.
  Par la symétrie de R, zRx et ensuite par transitivité, yRx.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc xRt, et comme yRx, par transitivité on obtient yRt, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$

Théorème - continuation(I)

Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R,\ A \cap B \neq \emptyset \ \Rightarrow \ A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists (x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient xRz et yRz.
  Par la symétrie de R, zRx et ensuite par transitivité, yRx.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc xRt, et comme yRx, par transitivité on obtient yRt, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$

Théorème - continuation(I)

Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R,\ A \cap B \neq \varnothing \ \Rightarrow\ A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists(x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing \ \Rightarrow\ \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient xRz et yRz.
  Par la symétrie de R, zRx et ensuite par transitivité, yRx.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc xRt, et comme yRx, par transitivité on obtient yRt, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$

Théorème - continuation(I)

Démonstration.

Rappel : $\mathcal{Y}_R = \{\mathcal{C}(x) \mid x \in M\}$.

- On prouve $\forall(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R,\ A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A = B$. Soit $(A, B) \in \mathcal{Y}_R \times \mathcal{Y}_R$ quelconque.
  Par definition, $\exists(x, y) \in M \times M$, tel que $A = \mathcal{C}(x)$ et $B = \mathcal{C}(Y)$
  On prouve $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.
  Soit $(x, y) \in M \times M$ et supposons $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \varnothing$. Donc $\exists z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$, et on obtient xRz et yRz.
  Par la symétrie de R, zRx et ensuite par transitivité, yRx.
  Maintenant soit $t \in \mathcal{C}(x)$ quelconque. Donc xRt, et comme yRx, par transitivité on obtient yRt, donc $t \in \mathcal{C}(y)$ et on conclu $\mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}(y)$. De facon similaire on montre $\mathcal{C}(y) \subseteq \mathcal{C}(x)$, et donc $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve “$\Leftarrow$”. Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d’abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d’équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d’où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in M \times M$, on a $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}} \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)) \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (y \in P \text{ et } x \in P)) \iff (y, x) \in R_{\mathcal{Y}}$
  et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est symétrique.

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in M \times M$, on a $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}} \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)) \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (y \in P \text{ et } x \in P)) \iff (y, x) \in R_{\mathcal{Y}}$
  et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est symétrique.

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in M \times M$, on a $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}} \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)) \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (y \in P \text{ et } x \in P)) \iff (y, x) \in R_{\mathcal{Y}}$
  et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est symétrique.
- Soit $((x, y), z) \in (M \times M) \times M$ tels que $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}}$ et $(y, z) \in R_{\mathcal{Y}}$. Il existe $P \in \mathcal{Y}$ et $Q \in \mathcal{Y}$ tels que $(x \in P \text{ et } y \in P)$ et $(y \in Q \text{ et } z \in Q)$. Comme $P \cap Q \neq \emptyset$ et $\mathcal{Y}$ est une partition, on a $P = Q$, donc $(x \in P \text{ et } z \in P)$, et donc $(x, z) \in R_{\mathcal{Y}}$ et on conclu que $R_{\mathcal{Y}}$ est transitive

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_\mathcal{Y} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_\mathcal{Y}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_\mathcal{Y}$, et donc $R_\mathcal{Y}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in M \times M$, on a $(x, y) \in R_\mathcal{Y} \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)) \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (y \in P \text{ et } x \in P)) \iff (y, x) \in R_\mathcal{Y}$
  et donc $R_\mathcal{Y}$ est symétrique.
- Soit $((x, y), z) \in (M \times M) \times M$ tels que $(x, y) \in R_\mathcal{Y}$ et $(y, z) \in R_\mathcal{Y}$. Il existe $P \in \mathcal{Y}$ et $Q \in \mathcal{Y}$ tels que $(x \in P \text{ et } y \in P)$ et $(y \in Q \text{ et } z \in Q)$. Comme $P \cap Q \neq \emptyset$ et $\mathcal{Y}$ est une partition, on a $P = Q$, donc $(x \in P \text{ et } z \in P)$, et donc $(x, z) \in R_\mathcal{Y}$ et on conclu que $R_\mathcal{Y}$ est transitive

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in M \times M$, on a $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}} \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)) \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (y \in P \text{ et } x \in P)) \iff (y, x) \in R_{\mathcal{Y}}$
  et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est symétrique.
- Soit $((x, y), z) \in (M \times M) \times M$ tels que $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}}$ et $(y, z) \in R_{\mathcal{Y}}$. Il existe $P \in \mathcal{Y}$ et $Q \in \mathcal{Y}$ tels que $(x \in P \text{ et } y \in P)$ et $(y \in Q \text{ et } z \in Q)$. Comme $P \cap Q \neq \varnothing$ et $\mathcal{Y}$ est une partition, on a $P = Q$, donc $(x \in P \text{ et } z \in P)$, et donc $(x, z) \in R_{\mathcal{Y}}$ et on conclu que $R_{\mathcal{Y}}$ est transitive

Théorème - continuation(II)

Démonstration.

On prouve "$\Leftarrow$". Soit $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ une partition et soit $R_{\mathcal{Y}} = \{(x, y) \mid \exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)\}$. On prouve d'abord que $R_{\mathcal{Y}}$ est une relation d'équivalence.

- Par définition, $\forall x \in M$, $\exists P \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in P$, d'où $(x, x) \in R_{\mathcal{Y}}$, et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in M \times M$, on a $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}} \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (x \in P \text{ et } y \in P)) \iff (\exists P \in \mathcal{Y}, (y \in P \text{ et } x \in P)) \iff (y, x) \in R_{\mathcal{Y}}$
  et donc $R_{\mathcal{Y}}$ est symétrique.
- Soit $((x, y), z) \in (M \times M) \times M$ tels que $(x, y) \in R_{\mathcal{Y}}$ et $(y, z) \in R_{\mathcal{Y}}$. Il existe $P \in \mathcal{Y}$ et $Q \in \mathcal{Y}$ tels que $(x \in P \text{ et } y \in P)$ et $(y \in Q \text{ et } z \in Q)$. Comme $P \cap Q \neq \emptyset$ et $\mathcal{Y}$ est une partition, on a $P = Q$, donc $(x \in P \text{ et } z \in P)$, et donc $(x, z) \in R_{\mathcal{Y}}$ et on conclu que $R_{\mathcal{Y}}$ est transitive.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \overset{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative
2. Elle est monotone
3. ∪-distributive : [illegible]
4. [illegible]

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \overset{\text{déf}}{=} \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$.
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$.
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$.
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Composition de relations

Soient $R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq B \times C$ deux relations. La composition de R et R' notée $R \circ R'$ est définie par
$R' \circ R \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \cdot (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$.

Propriétés :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$.
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$.

L'inverse d'une relation R est la relation
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
Propriété : $(R^{-1})^{-1} = R$.

Fermetures des relations

Fermer une relation par une propriété revient à compléter la relation pour qu'elle vérifie cette propriété.

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

Fermetures des relations

Fermer une relation par une propriété revient à compléter la relation pour qu'elle vérifie cette propriété.

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

- La fermeture réflexive de R est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui contient R et qui est reflexive :

$$(\forall x, y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x \in A \cdot xQx)$$

Fermetures des relations

Fermer une relation par une propriété revient à compléter la relation pour qu'elle vérifie cette propriété.

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

- La fermeture réflexive de R est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui contient R et qui est reflexive :

$$(\forall x\ , y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x\ \in A \cdot xQx)$$

Fermetures des relations

Fermer une relation par une propriété revient à compléter la relation pour qu'elle vérifie cette propriété.
Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

- La fermeture réflexive de R est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui contient R et qui est reflexive :

$$(\forall x , y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x \in A \cdot xQx)$$

- La fermeture transitive de R, notée R^+ est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui est transitive et qui contient R :

$$(\forall x , y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x , y, z \in A \cdot xQy \wedge yQz \implies xQz)$$

Fermetures des relations

Fermer une relation par une propriété revient à compléter la relation pour qu'elle vérifie cette propriété.

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

- La fermeture réflexive de R est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui contient R et qui est reflexive :

$$(\forall x\ , y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x\ \in A \cdot xQx)$$

- La fermeture transitive de R, notée R^+ est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui est transitive et qui contient R :

$$(\forall x\ , y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x\ , y, z \in A \cdot xQy \wedge yQz \implies xQz)$$

Fermetures des relations

Fermer une relation par une propriété revient à compléter la relation pour qu'elle vérifie cette propriété.

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

- La fermeture réflexive de R est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui contient R et qui est reflexive :

$$(\forall x\ , y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x\ \in A \cdot xQx)$$

- La fermeture transitive de R, notée R^+ est la plus petite relation $Q \subseteq A \times B$ qui est transitive et qui contient R :

$$(\forall x\ , y \in A \cdot xRy \implies xQy) \wedge (\forall x\ , y, z \in A \cdot xQy \wedge yQz \implies xQz)$$

- La fermeture réflexive-transitive est notée R^*. C'est la plus petite relation qui contient R et qui est reflexive et transitive.

Relations n-aires

$R \subseteq A \times B$ est une relation binaire.
On peut étendre cette notion aux relations n-aires :
$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, la relation R est soit la constante vrai soit la constante faux.

- Pour $n = 1$, la relation R est un sous-ensemble A_1 de A. Elle induit un prédicat $\mathcal{P}_{A_1}$, tel que $\mathcal{P}_{A_1}(x)$ est vrai ssi $x \in A_1$.

Relations n-aires

$R \subseteq A \times B$ est une relation binaire.
On peut étendre cette notion aux relations n-aires :
$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, la relation R est soit la constante vrai soit la constante faux.
- Pour $n = 1$, la relation R est un sous-ensemble A_1 de A. Elle induit un prédicat $\mathcal{P}_{A_1}$, tel que $\mathcal{P}_{A_1}(x)$ est vrai ssi $x \in A_1$.