INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 8

Plan du chapitre

- Inférences et ensembles
  - Inclusion
  - Égalité extensionnelle
  - Intersection
  - Union

Inclusion

Version longue

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ x_0 \in B\end{array}}{x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in B}\,\Rightarrow\mathrm{I}[n]}{\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B}\,\forall_{\mathrm{I}}}{A \subseteq B}\,\subseteq\text{déf}
$$

Version abrégée

$$
\cfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ x_0 \in B\end{array}}{A \subseteq B}\,\subseteq\text{déf}[n]
$$

Inclusion

Version longue

$$\begin{array}{cl}
\overbrace{x_0 \in A}^{[n]} & \\
\vdots & \\
x_0 \in B & \\ \cline{1-1}
x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in B & \Rightarrow\mathrm{I}[n] \\ \cline{1-1}
\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B & \forall_{\mathrm{I}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \subseteq \text{déf} \\
A \subseteq B &
\end{array}$$

Version abrégée

$$\begin{array}{cl}
\overbrace{x_0 \in A}^{[n]} & \\
\vdots & \\
x_0 \in B & \\ \cline{1-1} \cline{1-1}
A \subseteq B & \subseteq \text{déf}[n]
\end{array}$$

Inférences et ensembles

- Inclusion
- Égalité extensionnelle
- Intersection
- Union

Égalité extensionnelle

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ x_0 \in B\end{array}}{x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in B}\,\Rightarrow\mathrm{I}[n] \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in B}^{[m]}\\ \vdots \\ x_0 \in A\end{array}}{x_0 \in B \Rightarrow x_0 \in A}\,\Rightarrow\mathrm{I}[m]}{x_0 \in A \Leftrightarrow x_0 \in B}\,\wedge\mathrm{I}}{\forall x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B}\,\forall_{\mathrm{I}}}{A = B}\,\mathrm{ext}$$

Abrégé

$$\cfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ x_0 \in B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in B}^{[m]}\\ \vdots \\ x_0 \in A\end{array}}{A = B}\,\mathrm{ext}[n,m]$$

Égalité extensionnelle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ x_0 \in B\end{array}}{x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in B}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[n] \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in B}^{[m]}\\ \vdots\\ x_0 \in A\end{array}}{x_0 \in B \Rightarrow x_0 \in A}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[m]}{x_0 \in A \Leftrightarrow x_0 \in B}\,\wedge\mathrm{I}}{\forall x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B}\,\forall_{\mathrm{I}}}{A = B}\,\mathrm{ext}$$

Abrégé

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ x_0 \in B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in B}^{[m]}\\ \vdots\\ x_0 \in A\end{array}\\ \hline\hline A = B\end{array}\ \mathrm{ext}[n,m]$$

Intersection

Version longue

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \qquad x \in B}{x \in A \;\wedge\; x \in B}\,\wedge\mathrm{I}}{x \in A \cap B}\,\cap\,\text{déf}$$

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cap B}{x \in A \;\wedge\; x \in B}\,\cap\,\text{déf}}{x \in A}\,\wedge\mathrm{E}_1$$

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cap B}{x \in A \;\wedge\; x \in B}\,\cap\,\text{déf}}{x \in B}\,\wedge\mathrm{E}_2$$

Version abrégée

$$\dfrac{\in A \qquad \in B}{\in A \cap B}\,\wedge\mathrm{I}\cap$$

$$\dfrac{\in A \cap B}{\in A}\,\cap\wedge\mathrm{E}_1$$

$$\dfrac{\in A \cap B}{\in B}\,\cap\wedge\mathrm{E}_2$$

Intersection

Version longue

$$\begin{array}{cl} x \in A \qquad\quad x \in B & \\ \cline{1-1} x \in A \ \wedge \ x \in B & \wedge\mathrm{I} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cap\,\text{déf} \\ x \in A \cap B & \end{array}$$

Version abrégée

$$\begin{array}{cl} x \in A \qquad\quad x \in B & \\ \hline\hline x \in A \cap B & \wedge\mathrm{I}\cap \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} x \in A \cap B & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cap\,\text{déf} \\ x \in A \ \wedge \ x \in B & \wedge\mathrm{E}_1 \\ \cline{1-1} x \in A & \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \in A \cap B & \\ \hline\hline \in A & \cap\wedge\mathrm{E}_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} x \in A \cap B & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cap\,\text{déf} \\ x \in A \ \wedge \ x \in B & \wedge\mathrm{E}_2 \\ \cline{1-1} x \in B & \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \in A \cap B & \\ \hline\hline \in B & \cap\wedge\mathrm{E}_2 \end{array}$$

Intersection

Version longue

$$\begin{array}{c} x \in A \qquad x \in B \\ \hline x \in A \ \wedge\ x \in B \\ \hdashline x \in A \cap B \end{array} \begin{array}{l} \wedge\mathrm{I} \\ \cap\,\text{déf} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hdashline x \in A \ \wedge\ x \in B \\ \hline x \in A \end{array} \begin{array}{l} \cap\,\text{déf} \\ \wedge\mathrm{E}_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hdashline x \in A \ \wedge\ x \in B \\ \hline x \in B \end{array} \begin{array}{l} \cap\,\text{déf} \\ \wedge\mathrm{E}_2 \end{array}$$

Version abrégée

$$\begin{array}{c} x \in A \qquad x \in B \\ \hline\hline x \in A \cap B \end{array} \ \wedge\mathrm{I}\cap$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hline\hline x \in A \end{array} \ \cap\wedge\mathrm{E}_1$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hline\hline x \in B \end{array} \ \cap\wedge\mathrm{E}_2$$

Intersection

Version longue

$$\begin{array}{cl} x \in A \qquad x \in B & \\ \hline x \in A \ \wedge \ x \in B & \wedge\mathrm{I} \\ \hdashline x \in A \cap B & \cap\,\text{déf} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} x \in A \cap B & \\ \hdashline x \in A \ \wedge \ x \in B & \cap\,\text{déf} \\ \hline x \in A & \wedge\mathrm{E}_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} x \in A \cap B & \\ \hdashline x \in A \ \wedge \ x \in B & \cap\,\text{déf} \\ \hline x \in B & \wedge\mathrm{E}_2 \end{array}$$

Version abrégée

$$\begin{array}{cl} x \in A \qquad x \in B & \\ \hline\hline x \in A \cap B & \wedge\mathrm{I}\cap \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} x \in A \cap B & \\ \hline\hline x \in A & \cap\wedge\mathrm{E}_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} x \in A \cap B & \\ \hline\hline x \in B & \cap\wedge\mathrm{E}_2 \end{array}$$

Intersection

Version longue

$$\begin{array}{c} x \in A \qquad x \in B \\ \hline x \in A \ \wedge \ x \in B \\ \hdashline x \in A \cap B \end{array} \begin{array}{l} \wedge\mathrm{I} \\ \cap\,\mathrm{déf} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hdashline x \in A \ \wedge \ x \in B \\ \hline x \in A \end{array} \begin{array}{l} \cap\,\mathrm{déf} \\ \wedge\mathrm{E}_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hdashline x \in A \ \wedge \ x \in B \\ \hline x \in B \end{array} \begin{array}{l} \cap\,\mathrm{déf} \\ \wedge\mathrm{E}_2 \end{array}$$

Version abrégée

$$\begin{array}{c} x \in A \qquad x \in B \\ \hline\hline x \in A \cap B \end{array} \wedge\mathrm{I}\cap$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hline\hline x \in A \end{array} \cap\wedge\mathrm{E}_1$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \hline\hline x \in B \end{array} \cap\wedge\mathrm{E}_2$$

Union (introduction)

Version longue

$$\frac{\dfrac{x \in A}{x \in A \ \vee \ x \in B}\ \vee\mathrm{I}_1}{x \in A \cup B}\ \cup\,\text{déf}$$

$$\frac{\dfrac{x \in B}{x \in A \ \vee \ x \in B}\ \vee\mathrm{I}_2}{x \in A \cup B}\ \cup\,\text{déf}$$

Version abrégée

$$\frac{x \in A}{x \in A \cup B}\ \vee\mathrm{I}_1\cup$$

$$\frac{x \in B}{x \in A \cup B}\ \vee\mathrm{I}_2\cup$$

Union (introduction)

Version longue

$$\begin{array}{c} x \in A \\ \hline x \in A \ \vee \ x \in B \\ \hdashline x \in A \cup B \end{array} \quad \begin{array}{l} \vee\mathrm{I}_1 \\ \cup\,\text{déf} \end{array}$$

Version abrégée

$$\dfrac{x \in A}{x \in A \cup B}\ \vee\mathrm{I}_1\cup$$

$$\begin{array}{c} x \in B \\ \hline x \in A \ \vee \ x \in B \\ \hdashline x \in A \cup B \end{array} \quad \begin{array}{l} \vee\mathrm{I}_2 \\ \cup\,\text{déf} \end{array}$$

$$\dfrac{x \in B}{x \in A \cup B}\ \vee\mathrm{I}_2\cup$$

Union (introduction)

Version longue

$$\cfrac{\cfrac{x \in A}{x \in A \ \lor \ x \in B}\ \lor\mathrm{I}_1}{x \in A \cup B}\ \cup\,\text{déf}$$

$$\cfrac{\cfrac{x \in B}{x \in A \ \lor \ x \in B}\ \lor\mathrm{I}_2}{x \in A \cup B}\ \cup\,\text{déf}$$

Version abrégée

$$\cfrac{x \in A}{x \in A \cup B}\ \lor\mathrm{I}_1\cup$$

$$\cfrac{x \in B}{x \in A \cup B}\ \lor\mathrm{I}_2\cup$$

Union (introduction)

Version longue

$$\begin{array}{c} x \in A \\ \hline x \in A \lor x \in B \\ \hdashline x \in A \cup B \end{array} \begin{array}{l} \lor\mathrm{I}_1 \\ \cup\,\text{déf} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in B \\ \hline x \in A \lor x \in B \\ \hdashline x \in A \cup B \end{array} \begin{array}{l} \lor\mathrm{I}_2 \\ \cup\,\text{déf} \end{array}$$

Version abrégée

$$\begin{array}{c} x \in A \\ \hline\hline x \in A \cup B \end{array} \;\lor\mathrm{I}_1\cup$$

$$\begin{array}{c} x \in B \\ \hline\hline x \in A \cup B \end{array} \;\lor\mathrm{I}_2\cup$$

Union (élimination)

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cup B}{x \in A \lor x \in B}\,\cup\text{déf} \qquad \begin{array}{c} \overbrace{x \in A}^{[n]} \\ \vdots \\ \mathsf{P} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overbrace{x \in B}^{[m]} \\ \vdots \\ \mathsf{P} \end{array}}{\mathsf{P}}\,\lor\text{E}[n,m]$$

Version abrégée

$$\dfrac{x \in A \cup B \qquad \begin{array}{c} \overbrace{x \in A}^{[n]} \\ \vdots \\ \mathsf{P} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overbrace{x \in B}^{[m]} \\ \vdots \\ \mathsf{P} \end{array}}{\mathsf{P}}\,\cup\lor\text{E}[n,m]$$

Union (élimination)

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cup B}{x \in A \lor x \in B}\;\cup\text{déf} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ \mathsf{P}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in B}^{[m]}\\ \vdots \\ \mathsf{P}\end{array}}{\mathsf{P}}\;\lor\mathrm{E}[n,m]$$

Version abrégée

$$\begin{array}{c} x \in A \cup B \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ \mathsf{P}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in B}^{[m]}\\ \vdots \\ \mathsf{P}\end{array} \\ \hline\hline \mathsf{P} \end{array}\;\cup\lor\mathrm{E}[n,m]$$

Union (élimination)

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cup B}{x \in A \lor x \in B}\,\cup\text{déf} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ P\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in B}^{[m]}\\ \vdots \\ P\end{array}}{P}\,\lor\text{E}[n,m]$$

Version abrégée

$$\dfrac{x \in A \cup B \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in A}^{[n]}\\ \vdots \\ P\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in B}^{[m]}\\ \vdots \\ P\end{array}}{P}\,\cup\lor\text{E}[n,m]$$

Plan du chapitre

Inférences et ensembles

Propriétés remarquables

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration de la monotonie de $\cup$

Soient A, B, C et D des ensembles tels que :

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D.$$

On montre $A \cup C \subseteq B \cup D$. C'est-à-dire :

$$\forall x \; x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup D.$$

Soit x tel que $x \in A \cup C$. On distingue deux cas :

1. $\in$. De l'hypothèse $\subseteq$, nous déduisons $\in$. Donc $\in \cup$.
2. $\in$. De l'hypothèse $\subseteq$, nous déduisons $\in$. Donc $\in \cup$.

c.q.f.d.

Démonstration de la monotonie de ∪

Soient A, B, C et D des ensembles tels que :

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D.$$

On montre $A \cup C \subseteq B \cup D$. C'est-à-dire :

$$\forall x \; x \in A \cup C \;\Rightarrow\; x \in B \cup D.$$

Soit x tel que $x \in A \cup C$. On distingue deux cas :

1. $\in$. De l'hypothèse $\subseteq$, nous déduisons $\in$. Donc $\in \cup$
2. $\in$. De l'hypothèse $\subseteq$, nous déduisons $\in$. Donc $\in \cup$

Démonstration de la monotonie de $\cup$

Soient A, B, C et D des ensembles tels que :

$$A \subseteq B \land C \subseteq D.$$

On montre $A \cup C \subseteq B \cup D$. C'est-à-dire :

$$\forall x \; x \in A \cup C \;\Rightarrow\; x \in B \cup D.$$

Soit x tel que $x \in A \cup C$. On distingue deux cas :

1. $x \in A$. De l'hypothèse $A \subseteq B$, nous déduisons $x \in B$. Donc $x \in B \cup D$.
2. $x \in C$. De l'hypothèse $C \subseteq D$, nous déduisons $x \in D$. Donc $x \in B \cup D$.

q.e.d.

Démonstration de la monotonie de $\cup$

Soient A, B, C et D des ensembles tels que :

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D.$$

On montre $A \cup C \subseteq B \cup D$. C'est-à-dire :

$$\forall x \; x \in A \cup C \;\Rightarrow\; x \in B \cup D.$$

Soit x tel que $x \in A \cup C$. On distingue deux cas :

1. $x \in A$. De l'hypothèse $A \subseteq B$, nous déduisons $x \in B$. Donc $x \in B \cup D$.
2. $x \in C$. De l'hypothèse $C \subseteq D$, nous déduisons $x \in D$. Donc $x \in B \cup D$.

q.e.d.

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{\quad\cup\quad} = \overline{\quad} \cap \overline{\quad}$
   - $\overline{\quad\cap\quad} = \overline{\quad} \cup \overline{\quad}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{\quad \cup \quad} = \overline{\quad} \cap \overline{\quad}$
   - $\overline{\quad \cap \quad} = \overline{\quad} \cup \overline{\quad}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{\quad \cup \quad} = \overline{\quad} \cap \overline{\quad}$
   - $\overline{\quad \cap \quad} = \overline{\quad} \cup \overline{\quad}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \varnothing = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \varnothing$. En particulier, $A \setminus A = \varnothing$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Eléments neutres et absorbants

1. $\varnothing$ est un élément neutre de $\cup$: $\forall A\ A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$.
2. $\varnothing$ est l'unique élément neutre de $\cup$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow\ X = \varnothing.$$

3. $\varnothing$ est un élément absorbant de $\cap$: $\forall A\ A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$.
4. $\varnothing$ est l'unique élément absorbant de $\cap$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cap A = A \cap X = X) \Rightarrow\ X = \varnothing.$$

Eléments neutres et absorbants

1. $\emptyset$ est un élément neutre de $\cup$: $\forall A\ A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
2. $\emptyset$ est l'unique élément neutre de $\cup$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

3. $\emptyset$ est un élément absorbant de $\cap$: $\forall A\ A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$.
4. $\emptyset$ est l'unique élément absorbant de $\cap$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cap A = A \cap X = X) \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

Eléments neutres et absorbants

1. $\emptyset$ est un élément neutre de $\cup$: $\forall A\ A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
2. $\emptyset$ est l'unique élément neutre de $\cup$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

3. $\emptyset$ est un élément absorbant de $\cap$: $\forall A\ A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$.
4. $\emptyset$ est l'unique élément absorbant de $\cap$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cap A = A \cap X = X) \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

Eléments neutres et absorbants

1. $\emptyset$ est un élément neutre de $\cup$: $\forall A\ A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
2. $\emptyset$ est l'unique élément neutre de $\cup$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

3. $\emptyset$ est un élément absorbant de $\cap$: $\forall A\ A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$.
4. $\emptyset$ est l'unique élément absorbant de $\cap$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cap A = A \cap X = X) \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

Unicité de l'élément neutre de ∪

On veut montrer que l'ensemble vide est l'unique élément neutre de ∪. C'est-à-dire :

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow\ X = \varnothing.$$

Soit X un ensemble tel que $\forall A\ X \cup A = A \cup X = A$. (†)

On doit montrer $X = \varnothing$.

- De (†), nous obtenons $X \cup \varnothing = \varnothing$.
- Mais comme $\varnothing$ est un élément neutre de ∪, nous avons aussi $X \cup \varnothing = X$.
- Donc, $X \cup \varnothing = \varnothing = X$. q.e.d.

Unicité de l'élément neutre de $\cup$

On veut montrer que l'ensemble vide est l'unique élément neutre de $\cup$. C'est-à-dire :

$$\forall X \ (\forall A \ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow \ X = \varnothing.$$

Soit X un ensemble tel que $\forall A \ X \cup A = A \cup X = A$. (†)

On doit montrer $X = \varnothing$.

- De (†), nous obtenons $X \cup \varnothing = \varnothing$.
- Mais comme $\varnothing$ est un élément neutre de $\cup$, nous avons aussi $X \cup \varnothing = X$.
- Donc, $X \cup \varnothing = \varnothing = X$ q.e.d.

Unicité de l'élément neutre de $\cup$

On veut montrer que l'ensemble vide est l'unique élément neutre de $\cup$. C'est-à-dire :

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow\ X = \varnothing.$$

Soit X un ensemble tel que $\forall A\ X \cup A = A \cup X = A$. (†)

On doit montrer $X = \varnothing$.

- De (†), nous obtenons $X \cup \varnothing = \varnothing$.
- Mais comme $\varnothing$ est un élément neutre de $\cup$, nous avons aussi $X \cup \varnothing = X$.
- Donc, $X \cup \varnothing = \varnothing = X$. q.e.d.

Unicité de l'élément neutre de $\cup$

On veut montrer que l'ensemble vide est l'unique élément neutre de $\cup$. C'est-à-dire :

$$\forall X \; (\forall A \; X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow \; X = \varnothing.$$

Soit X un ensemble tel que $\forall A \; X \cup A = A \cup X = A$. (†)

On doit montrer $X = \varnothing$.

- De (†), nous obtenons $X \cup \varnothing = \varnothing$.
- Mais comme $\varnothing$ est un élément neutre de $\cup$, nous avons aussi $X \cup \varnothing = X$.
- Donc, $X \cup \varnothing = \varnothing = X$. q.e.d.

Unicité de l'élément neutre de ∪

On veut montrer que l'ensemble vide est l'unique élément neutre de ∪. C'est-à-dire :

$$\forall X \ (\forall A \ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow \ X = \varnothing.$$

Soit X un ensemble tel que $\forall A \ X \cup A = A \cup X = A$. (†)

On doit montrer $X = \varnothing$.

- De (†), nous obtenons $X \cup \varnothing = \varnothing$.
- Mais comme $\varnothing$ est un élément neutre de ∪, nous avons aussi $X \cup \varnothing = X$.
- Donc, $X \cup \varnothing = \varnothing = X$. q.e.d.