INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 6

Plan du chapitre

La double négation

A-t-on l'équivalence entre A et $\neg\neg A$?

La double négation

A-t-on l'équivalence entre A et $\neg\neg A$?

- $A \Rightarrow \neg\neg A$ (pas difficile)
- mais la réciproque $\neg\neg A \Rightarrow A$ ne peut se démontrer avec les règles précédentes (cf. théorème fondamental d'élimination des coupures)

D'où :

Règle supplémentaire : élimination de $\neg\neg$

$$\boxed{\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg\mathrm{E}}$$

La double négation

A-t-on l'équivalence entre A et $\neg\neg A$?

- $A \Rightarrow \neg\neg A$ (pas difficile)
- mais la réciproque $\neg\neg A \Rightarrow A$ ne peut se démontrer avec les règles précédentes (cf. théorème fondamental d'élimination des coupures)

D'où :

Règle supplémentaire : élimination de $\neg\neg$

$$\boxed{\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg\mathrm{E}}$$

La double négation

A-t-on l'équivalence entre A et $\neg\neg A$?

- $A \Rightarrow \neg\neg A$ (pas difficile)
- mais la réciproque $\neg\neg A \Rightarrow A$ ne peut se démontrer avec les règles précédentes (cf. théorème fondamental d'élimination des coupures)

D'où :

Règle supplémentaire : élimination de $\neg\neg$

$$\boxed{\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg\mathrm{E}}$$

La double négation

A-t-on l'équivalence entre A et $\neg\neg A$?

- $A \Rightarrow \neg\neg A$ (pas difficile)
- mais la réciproque $\neg\neg A \Rightarrow A$ ne peut se démontrer avec les règles précédentes (cf. théorème fondamental d'élimination des coupures)

D'où :

Règle supplémentaire : élimination de $\neg\neg$

$$\boxed{\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg\mathrm{E}}$$

Double négation, tiers exclu

Utilisation de définitions et arbres de preuve

$\neg A$ étant $A \Rightarrow \perp$ par définition,
(où A est une proposition quelconque) on peut remplacer à volonté $\neg A$ par $A \Rightarrow \perp$ et réciproquement

Convention

On utilise une barre de fraction en pointillé

$$\frac{A \Rightarrow \perp}{\neg A}\ \neg\,\text{déf} \qquad \frac{\neg A}{A \Rightarrow \perp}\ \neg\,\text{déf}$$

Utilisation de définitions et arbres de preuve

$\neg A$ étant $A \Rightarrow \bot$ par définition,
(où A est une proposition quelconque) on peut remplacer à volonté $\neg A$ par $A \Rightarrow \bot$ et réciproquement

Convention

On utilise une barre de fraction en pointillé

$$\dfrac{A \Rightarrow \bot}{\neg A}\ \neg\,\text{déf} \qquad\qquad \dfrac{\neg A}{A \Rightarrow \bot}\ \neg\,\text{déf}$$

Utilisation de définitions et arbres de preuve

$\neg A$ étant $A \Rightarrow \perp$ par définition,
(où A est une proposition quelconque) on peut remplacer à volonté $\neg A$ par $A \Rightarrow \perp$ et réciproquement

Convention

On utilise une barre de fraction en pointillé

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow \perp}{\neg A}\ \neg\,\text{déf}} \qquad \boxed{\dfrac{\neg A}{A \Rightarrow \perp}\ \neg\,\text{déf}}$$

Utilisation de définitions et arbres de preuve

$\neg A$ étant $A \Rightarrow \bot$ par définition,
(où A est une proposition quelconque) on peut remplacer à volonté $\neg A$ par $A \Rightarrow \bot$ et réciproquement

Convention

On utilise une barre de fraction en pointillé

$$\frac{A \Rightarrow \bot}{\neg A}\ \neg\,\text{déf} \qquad \frac{\neg A}{A \Rightarrow \bot}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemples

Exemple 1

$$\dfrac{(A \wedge B) \Rightarrow \bot}{\neg (A \wedge B)}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 2

$$\dfrac{A \wedge (B \Rightarrow \bot)}{A \wedge \neg B}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 3

$$\dfrac{A \vee \neg\neg B}{A \vee (\neg B \Rightarrow \bot)}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemples

Exemple 1

$$\frac{(A \land B) \Rightarrow \bot}{\neg (A \land B)}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 2

$$\frac{A \land (B \Rightarrow \bot)}{A \land \neg B}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 3

$$\frac{A \lor \neg\neg B}{A \lor (\neg B \Rightarrow \bot)}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemples

Exemple 1

$$\frac{(A \wedge B) \Rightarrow \bot}{\neg (A \wedge B)}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 2

$$\frac{A \wedge (B \Rightarrow \bot)}{A \wedge \neg B}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 3

$$\frac{A \vee \neg\neg B}{A \vee (\neg B \Rightarrow \bot)}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemples

Exemple 1

$$\dfrac{(A \wedge B) \Rightarrow \bot}{\neg (A \wedge B)}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 2

$$\dfrac{A \wedge (B \Rightarrow \bot)}{A \wedge \neg B}\ \neg\,\text{déf}$$

Exemple 3

$$\dfrac{A \vee \neg\neg B}{A \vee (\neg B \Rightarrow \bot)}\ \neg\,\text{déf}$$

Double négation, tiers exclu

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en raisonnant par l'absurde :

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\bot$
- par $\Rightarrow_I$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \bot$,
  c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg E$ inférer A

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{[1]} \\ \vdots \\ \bot}{\neg A \Rightarrow \bot}\Rightarrow I[1]}{\neg\neg A}\neg\,\text{déf}}{A}\neg\neg E$$

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en raisonnant par l'absurde :

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\perp$
- par $\Rightarrow_I$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \perp$, c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg E$ inférer A

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{\neg A}^{[1]} \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg A \Rightarrow \perp}\Rightarrow I[1]}{\neg\neg A}\neg\,\text{déf}}{A}\neg\neg E$$

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en raisonnant par l'absurde :

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\bot$
- par $\Rightarrow_I$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \bot$, c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg E$ inférer A

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{\neg A}^{[1]} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A \Rightarrow \bot}\Rightarrow I[1]}{\neg\neg A}\,\neg\,\text{déf}}{A}\,\neg\neg E$$

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en raisonnant par l'absurde :

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\perp$
- par $\Rightarrow_{\mathrm{I}}$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \perp$, c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg\mathrm{E}$ inférer A

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{[1]} \\ \vdots \\ \perp}{\neg A \Rightarrow \perp}\,\Rightarrow\mathrm{I}[1]}{\neg\neg A}\,\neg\,\text{déf}}{A}\,\neg\neg\mathrm{E}
$$

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en raisonnant par l'absurde :

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\bot$
- par $\Rightarrow_{\mathrm{I}}$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \bot$, c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg\mathrm{E}$ inférer A

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\overbrace{\neg A}^{[1]} \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A \Rightarrow \bot}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1]}{\neg\neg A}\ \neg\,\text{déf}}{A}\ \neg\neg\mathrm{E}$$

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en raisonnant par l'absurde :

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\bot$
- par $\Rightarrow_{\mathrm{I}}$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \bot$,
  c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg\mathrm{E}$ inférer A

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{\neg A}^{[1]} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A \Rightarrow \bot}\Rightarrow\mathrm{I}[1]}{\neg\neg A}\neg\,\text{déf}}{A}\neg\neg\mathrm{E}$$

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en raisonnant par l'absurde :

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\bot$
- par $\Rightarrow_{\mathrm{I}}$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \bot$, c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg\mathrm{E}$ inférer A

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{\neg A}^{[1]} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A \Rightarrow \bot}\Rightarrow\mathrm{I}[1]}{\neg\neg A}\,\neg\,\text{déf}}{A}\,\neg\neg\mathrm{E}$$

Utilisation du raisonnement par l'absurde

Exemples d'utilisation indispensable de $\neg\neg\mathrm{E}$

- $\neg\neg A \Rightarrow A$ (évidemment !)
- $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(\forall x\, P(x)) \Rightarrow \exists x\, \neg P(x)$

Utilisation du raisonnement par l'absurde

Exemples d'utilisation indispensable de $\neg\neg\mathrm{E}$

- $\neg\neg A \Rightarrow A$ (évidemment !)
- $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(\forall x\ P(x)) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$

Utilisation du raisonnement par l'absurde

Exemples d'utilisation indispensable de $\neg\neg\mathrm{E}$

- $\neg\neg A \Rightarrow A$ (évidemment !)
- $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(\forall x\ P(x)) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$

Utilisation du raisonnement par l'absurde

Exemples d'utilisation indispensable de $\neg\neg\mathrm{E}$

- $\neg\neg A \Rightarrow A$ (évidemment !)
- $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(\forall x\ P(x)) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$

Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- pour n'importe quelle proposition A,
  on a soit A soit sa négation $\neg$A.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de principe du tiers exclu.

$$\frac{}{A \vee \neg A}\ \tfrac{1}{3}ex$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg\mathrm{E}$ *(théorème fondamental de réduction)*.

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- pour n'importe quelle proposition A, on a soit A soit sa négation $\neg A$.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de principe du tiers exclu.

$$\dfrac{}{A \vee \neg A}\ \tfrac{1}{3}ex$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg\mathrm{E}$ *(théorème fondamental de réduction)*.

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- pour n'importe quelle proposition A, on a soit A soit sa négation $\neg A$.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de principe du tiers exclu.

$$\frac{}{A \vee \neg A}\ \tfrac{1}{3}ex$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg\mathrm{E}$ (théorème fondamental de réduction).

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- pour n'importe quelle proposition A,
  on a soit A soit sa négation ¬A.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de principe du tiers exclu.

$$\boxed{\dfrac{}{A \lor \neg A}\ \tfrac{1}{3}ex}$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg\mathrm{E}$ (théorème fondamental de réduction).

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- pour n'importe quelle proposition A,
  on a soit A soit sa négation $\neg A$.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de principe du tiers exclu.

$$\boxed{\dfrac{}{A \vee \neg A}\ \tfrac{1}{3}ex}$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg\mathrm{E}$ *(théorème fondamental de réduction)*.

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- pour n'importe quelle proposition A,
  on a soit A soit sa négation $\neg A$.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de principe du tiers exclu.

$$\boxed{\dfrac{}{A \vee \neg A}\ \tfrac{1}{3}ex}$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg\mathrm{E}$ *(théorème fondamental de réduction)*.

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

Quelques arbres de preuve avec négation (1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{[2]}}{A \Rightarrow \bot}\ \neg\,\text{déf} \qquad \overbrace{A}^{[1]}}{\bot}\ {\Rightarrow}\text{E}}{\neg A \Rightarrow \bot}\ {\Rightarrow}\text{I}[2]}{\neg\neg A}\ \neg\,\text{déf}}{A \Rightarrow \neg\neg A}\ {\Rightarrow}\text{I}[1]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\ \tfrac{1}{3}\,ex \qquad \overbrace{A}^{[2]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg\neg A}^{[1]}}{\neg A \Rightarrow \bot}\ \neg\,\text{déf} \qquad \overbrace{\neg A}^{[3]}}{\bot}\ {\Rightarrow}\text{E}}{A}\ \bot\text{E}}{A}\ \vee\text{E}[2,3]$$

$$A \qquad {\Rightarrow}\text{I}[1]$$

Quelques arbres de preuve avec négation (1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{[2]}}{A \Rightarrow \bot}\;\neg\,\text{déf} \qquad \overbrace{A}^{[1]}}{\bot}\;\Rightarrow\text{E}}{\dfrac{\neg A \Rightarrow \bot}{\neg\neg A}\;\neg\,\text{déf}}\;\Rightarrow\text{I}[2]}{A \Rightarrow \neg\neg A}\;\Rightarrow\text{I}[1]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\;\tfrac{1}{3}\,ex \qquad \overbrace{A}^{[2]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg\neg A}^{[1]}}{\neg A \Rightarrow \bot}\;\neg\,\text{déf} \qquad \overbrace{\neg A}^{[3]}}{\bot}\;\Rightarrow\text{E}}{A}\;\bot\text{E}}{A}\;\vee\text{E}[2,3]}{}\;\Rightarrow\text{I}[1]$$

Quelques arbres de preuve avec négation (2)

Dérivation du tiers exclu utilisant $\neg\neg\mathrm{E}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{(A \vee \neg A) \Rightarrow \bot}^{[1]}$}
\AxiomC{$\overbrace{(A \vee \neg A) \Rightarrow \bot}^{[1]}$}
\AxiomC{$\overbrace{A}^{[2]}$}
\RightLabel{$\vee\mathrm{I}_1$}
\UnaryInfC{$A \vee \neg A$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathrm{E}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathrm{I}[2]$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$\neg\ \text{déf}$}
\dottedLine
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{$\vee\mathrm{I}_2$}
\UnaryInfC{$A \vee \neg A$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathrm{E}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathrm{I}[1]$}
\UnaryInfC{$((A \vee \neg A) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$\neg\ \text{déf}$}
\dottedLine
\UnaryInfC{$\neg\neg(A \vee \neg A)$}
\RightLabel{$\neg\neg\mathrm{E}$}
\UnaryInfC{$A \vee \neg A$}
\end{prooftree}
$$

Double négation, tiers exclu

Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou $\neg A$ est vérifié
Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\ P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\mathrm{E}$
- mais moins informatives

Définition

- la logique classique est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\mathrm{E}$)
- la logique intuitionniste est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\mathrm{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations constructives, contrairement à la logique classique.

Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou $\neg A$ est vérifié

Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\ P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\mathrm{E}$
- mais moins informatives

Définition

- la logique classique est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\mathrm{E}$)
- la logique intuitionniste est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\mathrm{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations constructives, contrairement à la logique classique.

Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou $\neg A$ est vérifié
Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\ P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\mathrm{E}$
- mais moins informatives

Définition

- la logique classique est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\mathrm{E}$)
- la logique intuitionniste est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\mathrm{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations constructives, contrairement à la logique classique.

Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou ¬A est vérifié
Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\ P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\mathrm{E}$
- mais moins informatives

Définition

- la logique classique est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\mathrm{E}$)
- la logique intuitionniste est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\mathrm{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations constructives, contrairement à la logique classique.

Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou ¬A est vérifié
Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\ P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\mathrm{E}$
- mais moins informatives

Définition

- la logique classique est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\mathrm{E}$)
- la logique intuitionniste est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\mathrm{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations constructives, contrairement à la logique classique.

Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou $\neg A$ est vérifié
Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\, P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\mathrm{E}$
- mais moins informatives

Définition

- la logique classique est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\mathrm{E}$)
- la logique intuitionniste est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\mathrm{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations constructives, contrairement à la logique classique.

Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou $\neg A$ est vérifié
Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\ P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\mathrm{E}$
- mais moins informatives

Définition

- la logique classique est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\mathrm{E}$)
- la logique intuitionniste est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\mathrm{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations constructives, contrairement à la logique classique.

Plan du chapitre

L'équivalence

Définition : $\boxed{A \Leftrightarrow B \;\stackrel{\text{déf}}{=\!=}\; A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A}$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :

$$\frac{A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}\,\Leftrightarrow \text{déf} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A}\,\Leftrightarrow \text{déf}$$

En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge\mathrm{I}$, $\wedge\mathrm{E}_1$ et $\wedge\mathrm{E}_2$:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A}\,\wedge\mathrm{I}}{A \Leftrightarrow B}\,\Leftrightarrow \text{déf} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A}\,\Leftrightarrow \text{déf}}{A \Rightarrow B}\,\wedge\mathrm{E}_1$$

et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge\mathrm{E}_2$.

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B}\,\wedge\mathrm{E}_1 \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A}\,\wedge\mathrm{E}_2$$

L'équivalence

Définition : $\boxed{A \Leftrightarrow B \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \ A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :

$$\dfrac{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \Leftrightarrow \text{déf}$$

En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge I$, $\wedge E_1$ et $\wedge E_2$:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \wedge I}{A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \Leftrightarrow \text{déf}}{A \Rightarrow B} \wedge E_1$$

et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge E_2$.

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

$$\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{\overline{A \Leftrightarrow B}} \wedge I \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{\overline{A \Rightarrow B}} \wedge E_1 \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{\overline{B \Rightarrow A}} \wedge E_2$$

L'équivalence

Définition : $\boxed{A \Leftrightarrow B \ \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \ A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :

$$\frac{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \Leftrightarrow \text{déf}$$

En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge\mathrm{I}$, $\wedge\mathrm{E}_1$ et $\wedge\mathrm{E}_2$:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \wedge\mathrm{I}}{A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \frac{\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \Leftrightarrow \text{déf}}{A \Rightarrow B} \wedge\mathrm{E}_1$$

et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge\mathrm{E}_2$.

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B} \wedge\mathrm{I} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B} \wedge\mathrm{E}_1 \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A} \wedge\mathrm{E}_2$$

L'équivalence

Définition : $\boxed{A \Leftrightarrow B \ \overset{\text{déf}}{=\!=} \ A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A}$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :

$$\frac{A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A}\ \Leftrightarrow \text{déf}$$

En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge$I, $\wedge E_1$ et $\wedge E_2$:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A}\ \wedge \mathrm{I}}{A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \frac{\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A}\ \Leftrightarrow \text{déf}}{A \Rightarrow B}\ \wedge E_1$$

et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge E_2$.

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}\ \wedge \mathrm{I} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B}\ \wedge E_1 \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A}\ \wedge E_2$$

L'équivalence

Définition : $\boxed{A \Leftrightarrow B \quad \overset{\text{déf}}{=\!=} \quad A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :

$$\dfrac{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \Leftrightarrow \text{déf}$$

En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge\mathrm{I}$, $\wedge\mathrm{E}_1$ et $\wedge\mathrm{E}_2$:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \wedge\mathrm{I}}{A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A} \Leftrightarrow \text{déf}}{A \Rightarrow B} \wedge\mathrm{E}_1$$

et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge\mathrm{E}_2$.

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

$$\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B} \wedge\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B} \wedge\mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A} \wedge\mathrm{E}_2$$

L'équivalence

Définition : $\boxed{A \Leftrightarrow B \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :

$$\frac{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}\ \Leftrightarrow \text{déf}$$

En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge\mathrm{I}$, $\wedge\mathrm{E}_1$ et $\wedge\mathrm{E}_2$:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}\ \wedge\mathrm{I}}{A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow \text{déf} \qquad \frac{\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A}\ \Leftrightarrow \text{déf}}{A \Rightarrow B}\ \wedge\mathrm{E}_1$$

et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge\mathrm{E}_2$.

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}\ \wedge\mathrm{I} \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B}\ \wedge\mathrm{E}_1 \qquad \frac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A}\ \wedge\mathrm{E}_2$$