INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 5

Plan du chapitre

Raisonnement équationnel

Introduction : un individu t quelconque est égal à lui-même

$$\boxed{\dfrac{}{t = t}\;{=}\mathrm{I}}$$

où t représente une constante ou une variable quelconque
(plus généralement : un terme, vu plus tard)

Élimination : principe de substitution de Leibniz
Si $a = b$, toute propriété de a est transmise à b
(on peut remplacer à volonté a par b).

$$\boxed{\dfrac{a = b \qquad \mathsf{P}(a)}{\mathsf{P}(b)}\;{=}\mathrm{E}}$$

Raisonnement équationnel

Introduction : un individu t quelconque est égal à lui-même

$$\frac{}{t = t}\ {=}\mathrm{I}$$

où t représente une constante ou une variable quelconque
(plus généralement : un terme, vu plus tard)

Élimination : principe de substitution de Leibniz
Si $a = b$, toute propriété de a est transmise à b
(on peut remplacer à volonté a par b).

$$\frac{a = b \qquad \mathsf{P}(a)}{\mathsf{P}(b)}\ {=}\mathrm{E}$$

Raisonnement équationnel

Introduction : un individu t quelconque est égal à lui-même

$$\boxed{\dfrac{}{t = t}\ {=}\mathrm{I}}$$

où t représente une constante ou une variable quelconque
(plus généralement : un terme, vu plus tard)

Élimination : principe de substitution de Leibniz
Si $a = b$, toute propriété de a est transmise à b
(on peut remplacer à volonté a par b).

$$\boxed{\dfrac{a = b \qquad \mathsf{P}(a)}{\mathsf{P}(b)}\ {=}\mathrm{E}}$$

Propriétés de l'égalité

L'égalité est une relation réflexive

- $\forall x \;\; x = x$

L'égalité est une relation symétrique

- $\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

L'égalité est une relation transitive

- $\forall xyz \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = z \;\Rightarrow\; x = z$

Ces propriétés sont en fait des conséquences des principes d'introduction et d'élimination de l'égalité.

Propriétés de l'égalité

L'égalité est une relation réflexive

- $\forall x \;\; x = x$

L'égalité est une relation symétrique

- $\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

L'égalité est une relation transitive

- $\forall xyz \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = z \;\Rightarrow\; x = z$

Ces propriétés sont en fait des conséquences des principes d'introduction et d'élimination de l'égalité.

Propriétés de l'égalité

L'égalité est une relation réflexive

- $\forall x \;\; x = x$

L'égalité est une relation symétrique

- $\forall x y \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

L'égalité est une relation transitive

- $\forall x y z \;\; x = y \Rightarrow y = z \;\Rightarrow\; x = z$

Ces propriétés sont en fait des conséquences des principes d'introduction et d'élimination de l'égalité.

Exemple de raisonnement équationnel

Remarque

Si $a = b$, et si on a une propriété de a dans l'énoncé de laquelle a apparaît plusieurs fois, le principe de Leibniz permet d'inférer la propriété obtenue en remplaçant des occurrences de a par b, mais pas nécessairement toutes

Exemple

Sachant 5=2+3, de 5 - 5 < 1 on peut inférer 5 - (2+3) < 1

Exemple de raisonnement équationnel

Remarque

Si $a = b$, et si on a une propriété de a dans l'énoncé de laquelle a apparaît plusieurs fois, le principe de Leibniz permet d'inférer la propriété obtenue en remplaçant des occurrences de a par b, mais pas nécessairement toutes

Exemple

Sachant 5=2+3, de 5 - 5 < 1 on peut inférer 5 - (2+3) < 1

Exemple de raisonnement équationnel

Remarque

Si $a = b$, et si on a une propriété de a dans l'énoncé de laquelle a apparaît plusieurs fois, le principe de Leibniz permet d'inférer la propriété obtenue en remplaçant des occurrences de a par b, mais pas nécessairement toutes

Exemple

Sachant $5 = 2+3$, de $5 - 5 < 1$ on peut inférer $5 - (2+3) < 1$

Exemple de raisonnement équationnel

Remarque

Si $a = b$, et si on a une propriété de a dans l'énoncé de laquelle a apparaît plusieurs fois, le principe de Leibniz permet d'inférer la propriété obtenue en remplaçant des occurrences de a par b, mais pas nécessairement toutes

Exemple

Sachant $5=2+3$, de $5 - 5 < 1$ on peut inférer $5 - (2+3) < 1$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires

- supposons $x = y$ ....(1)
- on sait que $x = x$ (par $=_\mathrm{I}$) ....(2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ ....(3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ ....(4)
et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a
$\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires

- supposons $x = y$ .... (1)
- on sait que $x = x$ (par $=_{\mathrm{I}}$) .... (2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ .... (3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ .... (4)
et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a
$\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires

- supposons $x = y$ . . . . (1)
- on sait que $x = x$ (par $=_\mathrm{I}$) . . . . (2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ . . . . (3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ . . . . (4)
et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a
$\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires

- supposons $x = y$ . . . . (1)
- on sait que $x = x$ (par $=_{\mathrm{I}}$) . . . . (2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ . . . . (3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ . . . . (4)
et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a
$\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires

- supposons $x = y$ .... (1)
- on sait que $x = x$ (par $=_{\mathrm{I}}$) .... (2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ .... (3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ .... (4)
et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a
$\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires

- supposons $x = y$ .... (1)
- on sait que $x = x$ (par $=_{\mathrm{I}}$) .... (2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ .... (3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ .... (4)

et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a

$\forall xy \quad x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Application : symétrie de l'égalité

Soient x et y arbitraires

- supposons $x = y$ .... (1)
- on sait que $x = x$ (par $=_{\mathrm{I}}$) .... (2)
- grâce à (1) on remplace dans (2) la première occurrence de x par y :
  $y = x$ .... (3)

En levant (1), on infère $x = y \Rightarrow y = x$ .... (4)
et comme il ne subsiste aucune hypothèse où x et y sont libres, on a
$\forall xy \;\; x = y \;\Rightarrow\; y = x$

Égalité et raisonnement équationnel

Présentation de preuves équationnelles

$$
\mathcal{D}_i \left\{
\begin{array}{cll}
 & U & \\
= & & \{\text{indication justifiant } U = V\} \\
 & V & \\
= & & \{\text{indication justifiant } V = W\} \\
 & W & \\
\vdots & & \\
 & Y & \\
= & & \{\text{indication justifiant } Y = Z\} \\
 & Z &
\end{array}
\right.
$$

Utilisation

Présentation de preuves équationnelles

$$
\mathcal{D}_i \left\{
\begin{array}{lll}
 & U & \\
= & & \{\text{indication justifiant } U = V\} \\
 & V & \\
= & & \{\text{indication justifiant } V = W\} \\
 & W & \\
\vdots & & \\
 & Y & \\
= & & \{\text{indication justifiant } Y = Z\} \\
 & Z &
\end{array}
\right.
$$

Utilisation

$$\frac{}{U = Z}\,\mathcal{D}_i$$

Présentation de preuves équationnelles

$$\mathcal{D}_i \left\{ \begin{array}{lll} & U & \\ = & & \{\text{indication justifiant } U = V\} \\ & V & \\ = & & \{\text{indication justifiant } V = W\} \\ & W & \\ \vdots & & \\ & Y & \\ = & & \{\text{indication justifiant } Y = Z\} \\ & Z & \end{array} \right.$$

Utilisation

$$\frac{}{U = Z}\ \mathcal{D}_i$$

Présentation de preuves équationnelles

$$
\mathcal{D}_i \left\{
\begin{array}{lll}
 & U & \\
= & & \{\text{indication justifiant } U = V\} \\
 & V & \\
= & & \{\text{indication justifiant } V = W\} \\
 & W & \\
\vdots & & \\
 & Y & \\
= & & \{\text{indication justifiant } Y = Z\} \\
 & Z &
\end{array}
\right.
$$

Utilisation

$$
\frac{}{U = Z}\ \mathcal{D}_i
$$

Preuve équationnelle sous hypothèses

$$\mathcal{D}_i \left\{ \begin{array}{cl} & U \\ = & \qquad \{\text{justification de } U = V \text{ sous les hypothèses } h_1 \ldots h_2\} \\ & V \\ \vdots & \\ & Y \\ = & \qquad \{\text{justification de } Y = Z \text{ sous les hypothèses } h_3 \ldots h_4\} \\ & Z \end{array} \right.$$

Utilisation

$$\dfrac{\overbrace{\quad}^{h_1} \ \ldots \ \overbrace{\quad}^{h_2} \ \ldots \ \overbrace{\quad}^{h_3} \ \ldots \ \overbrace{\quad}^{h_4}}{U = Z} \ \mathcal{D}_i$$

Preuve équationnelle sous hypothèses

$$\mathcal{D}_i \left\{ \begin{array}{lll} & U & \\ = & & \{\text{justification de } U = V \text{ sous les hypothèses } h_1 \ldots h_2\} \\ & V & \\ \vdots & & \\ & Y & \\ = & & \{\text{justification de } Y = Z \text{ sous les hypothèses } h_3 \ldots h_4\} \\ & Z & \end{array} \right.$$

Utilisation

$$\dfrac{\overbrace{\quad}^{h_1} \;\ldots\; \overbrace{\quad}^{h_2} \;\ldots\; \overbrace{\quad}^{h_3} \;\ldots\; \overbrace{\quad}^{h_4}}{U = Z}\ \mathcal{D}_i$$

Plan du chapitre

Entiers et récurrence

Tous les individus considérés ici sont des entiers naturels

S est la fonction qui envoie tout entier n vers son successeur $n+1$

Définition des entiers naturels

- 0 est un entier naturel
- si n est un entier naturel, $\mathrm{S}(n)$ est un entier naturel
- tous les entiers sont engendrés par application des règles précédentes (en nombre fini)

Récurrence

$$\frac{\mathrm{P}(0) \qquad \forall n \;\; \mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{S}(n))}{\forall n \;\; \mathrm{P}(n)} \;\text{nat-rec}$$

Entiers et récurrence

Tous les individus considérés ici sont des entiers naturels

S est la fonction qui envoie tout entier n vers son successeur $n+1$

Définition des entiers naturels

- 0 est un entier naturel
- si n est un entier naturel, $\mathsf{S}(n)$ est un entier naturel
- tous les entiers sont engendrés par application des règles précédentes (en nombre fini)

Récurrence

$$\boxed{\dfrac{\mathsf{P}(0) \qquad \forall n \;\; \mathsf{P}(n) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{S}(n))}{\forall n \;\; \mathsf{P}(n)}\ \text{nat-rec}}$$

Plan du chapitre

L'absurde

On se donne une proposition « fausse » appelée l'absurde, notée $\perp$

Introduction

On ne veut pas que l'absurde soit démontrable !

Pas de règle d'introduction de $\perp$

Élimination

De l'absurde on infère n'importe quoi

$$\frac{\perp}{C}\ \perp E$$

L'absurde

On se donne une proposition « fausse » appelée l'absurde, notée $\bot$

Introduction

On ne veut pas que l'absurde soit démontrable !

$$\boxed{\text{Pas de règle d'introduction de } \bot}$$

Élimination

De l'absurde on infère n'importe quoi

$$\boxed{\frac{\bot}{C}\ \bot\mathrm{E}}$$

L'absurde

On se donne une proposition « fausse » appelée l'absurde, notée $\perp$

Introduction

On ne veut pas que l'absurde soit démontrable !

$$\boxed{\text{Pas de règle d'introduction de } \perp}$$

Élimination

De l'absurde on infère n'importe quoi

$$\boxed{\dfrac{\perp}{C}\ \perp\mathrm{E}}$$

L'absurde

On se donne une proposition « fausse » appelée l'absurde, notée $\perp$

Introduction

On ne veut pas que l'absurde soit démontrable !

$$\boxed{\text{Pas de règle d'introduction de } \perp}$$

Élimination

De l'absurde on infère n'importe quoi

$$\boxed{\frac{\perp}{C}\ \perp\mathrm{E}}$$

L'absurde

On se donne une proposition « fausse » appelée l'absurde, notée $\perp$

Introduction

On ne veut pas que l'absurde soit démontrable !

$$\boxed{\text{Pas de règle d'introduction de } \perp}$$

Mais peut-on tout de même démontrer l'absurde ?

Élimination

De l'absurde on infère n'importe quoi

$$\boxed{\frac{\perp}{C}\ \perp\mathrm{E}}$$

Peut-on démontrer l'absurde ?

Tentatives

$$\dfrac{\dfrac{\vdots ?}{A \wedge \perp}}{\perp}\wedge E_2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\vdots ?}{A \Rightarrow \perp} \quad \dfrac{\vdots ?}{A}}{\perp}\Rightarrow E$$

De telles tentatives peuvent aboutir dans un environnement comportant simultanémént, par exemple, des hypothèses comme B, $C \Rightarrow \perp$, $B \Rightarrow A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, ou tout simplement l'hypothèse $\perp$.

*Théorème de la théorie de la démonstration

L'absurde est indémontrable dans l'environnement vide

Peut-on démontrer l'absurde ?

Tentatives

$$\cfrac{\cfrac{\vdots\ ?}{A \wedge \bot}}{\bot}\ \wedge E_2 \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\vdots\ ?}{A \Rightarrow \bot} \quad \cfrac{\vdots\ ?}{A}}{\bot}\ \Rightarrow E$$

De telles tentatives peuvent aboutir dans un environnement comportant simultanémént, par exemple, des hypothèses comme B, $C \Rightarrow \bot$, $B \Rightarrow A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, ou tout simplement l'hypothèse $\bot$.

*Théorème de la théorie de la démonstration

L'absurde est indémontrable dans l'environnement vide

Peut-on démontrer l'absurde ?

Tentatives

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ ?}{A \wedge \bot}}{\bot}\ \wedge\mathrm{E}_2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ ?}{A \Rightarrow \bot} \qquad \dfrac{\vdots\ ?}{A}}{\bot}\ \Rightarrow\mathrm{E}$$

De telles tentatives peuvent aboutir dans un environnement comportant simultanémént, par exemple, des hypothèses comme B, $C \Rightarrow \bot$, $B \Rightarrow A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, ou tout simplement l'hypothèse $\bot$.

*Théorème de la théorie de la démonstration

L'absurde est indémontrable dans l'environnement vide

Peut-on démontrer l'absurde ?

Tentatives

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, ?}{A \wedge \bot}}{\bot}\,\wedge E_2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\, ?}{A \Rightarrow \bot} \qquad \dfrac{\vdots\, ?}{A}}{\bot}\,\Rightarrow E$$

De telles tentatives peuvent aboutir dans un environnement comportant simultanémént, par exemple, des hypothèses comme B, $C \Rightarrow \bot$, $B \Rightarrow A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, ou tout simplement l'hypothèse $\bot$.

*Théorème de la théorie de la démonstration

L'absurde est indémontrable dans l'environnement vide

Exercices

Exercice 1

Démontrer $\perp$ sous les hypothèses B, $C \Rightarrow \perp$, $B \Rightarrow A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$.

Exercice 2

Que faut-il ajouter à l'environnement décrivant les lois du gruyère pour aboutir à l'absurde ?

- $pg \Rightarrow pt$
- $pt \Rightarrow mg$

La réponse doit comporter des énoncés intuitivement valides et formés seulement à partir de pg, mg et $\perp$.

Exercices

Exercice 1

Démontrer $\perp$ sous les hypothèses B, $C \Rightarrow \perp$, $B \Rightarrow A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$.

Exercice 2

Que faut-il ajouter à l'environnement décrivant les lois du gruyère pour aboutir à l'absurde ?

- $pg \Rightarrow pt$
- $pt \Rightarrow mg$

La réponse doit comporter des énoncés intuitivement valides et formés seulement à partir de pg, mg et $\perp$.

Exercices

Exercice 1

Démontrer $\bot$ sous les hypothèses B, $C \Rightarrow \bot$, $B \Rightarrow A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$.

Exercice 2

Que faut-il ajouter à l'environnement décrivant les lois du gruyère pour aboutir à l'absurde ?

- $pg \Rightarrow pt$
- $pt \Rightarrow mg$

La réponse doit comporter des énoncés intuitivement valides et formés seulement à partir de pg, mg et $\bot$.

Absurde et négation

- L'absurde
- La négation

La négation

La négation de A (notation $\neg A$) est la proposition qui, en présence de A, conduit à l'absurde.

Définition

$$\boxed{\neg A \stackrel{\text{déf}}{=\!=} A \Rightarrow \perp}$$

Remarques

- la définition précédente indique que la négation de $\neg A$ est $\neg A \Rightarrow \perp$, c-à-d. $(A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$
- en présence d'une proposition de la forme $A \Rightarrow \perp$, A aussi conduit à l'absurde

La négation

La négation de A (notation $\neg A$) est la proposition qui, en présence de A, conduit à l'absurde.

Définition

$$\boxed{\neg A \stackrel{\text{déf}}{=\!=} A \Rightarrow \bot}$$

Remarques

- la définition précédente indique que la négation de $\neg A$ est $\neg A \Rightarrow \bot$, c-à-d. $(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
- en présence d'une proposition de la forme $A \Rightarrow \bot$, A aussi conduit à l'absurde

La négation

La négation de A (notation $\neg A$) est la proposition qui, en présence de A, conduit à l'absurde.

Définition

$$\boxed{\neg A \quad \underline{\underline{\text{déf}}} \quad A \Rightarrow \bot}$$

Remarques

- la définition précédente indique que la négation de $\neg A$ est $\neg A \Rightarrow \bot$, c-à-d $(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
- en présence d'une proposition de la forme $A \Rightarrow \bot$, A aussi conduit à l'absurde

La négation

La négation de A (notation $\neg A$) est la proposition qui, en présence de A, conduit à l'absurde.

Définition

$$\boxed{\neg A \overset{\text{déf}}{=\!=} A \Rightarrow \bot}$$

Remarques

- la définition précédente indique que la négation de $\neg A$ est $\neg A \Rightarrow \bot$, c-à-d. $(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
- en présence d'une proposition de la forme $A \Rightarrow \bot$, A aussi conduit à l'absurde

La négation

La négation de A (notation $\neg A$) est la proposition qui, en présence de A, conduit à l'absurde.

Définition

$$\boxed{\neg A \;\stackrel{\text{déf}}{=\!=}\; A \Rightarrow \bot}$$

Remarques

- la définition précédente indique que la négation de $\neg A$ est $\neg A \Rightarrow \bot$, c-à-d. $(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
- en présence d'une proposition de la forme $A \Rightarrow \bot$, A aussi conduit à l'absurde