INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 4

Plan du chapitre

Formule existentielle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\exists x G(x)$	– il existe x, x est glissante – il existe une route glissante

$\exists$ est le quantificateur existentiel

Dans $\exists x G(x)$, la variable x est quantifiée existentiellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\exists x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\exists x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\exists x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\exists x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\exists x G(x) \Rightarrow \exists x D(x)$	$\exists x [G(x) \Rightarrow [\exists x D(x)]]$

Formule existentielle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\exists x G(x)$	– il existe x, x est glissante – il existe une route glissante

$\exists$ est le quantificateur existentiel

Dans $\exists x G(x)$, la variable x est quantifiée existentiellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\exists x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\exists x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\exists x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\exists x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\exists x G(x) \Rightarrow \exists x D(x)$	$\exists x[G(x) \Rightarrow [\exists x D(x)]]$

Formule existentielle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\exists x G(x)$	– il existe x, x est glissante – il existe une route glissante

$\exists$ est le quantificateur existentiel

Dans $\exists x G(x)$, la variable x est quantifiée existentiellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\exists x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\exists x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\exists x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\exists x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\exists x G(x) \Rightarrow \exists x D(x)$	$\exists x[G(x) \Rightarrow [\exists x D(x)]]$

Formule existentielle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\exists x G(x)$	– il existe x, x est glissante – il existe une route glissante

$\exists$ est le quantificateur existentiel

Dans $\exists x G(x)$, la variable x est quantifiée existentiellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\exists x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\exists x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\exists x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\exists x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\exists x G(x) \Rightarrow \exists x D(x)$	$\exists x [G(x) \Rightarrow [\exists x D(x)]]$

Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la N90 est verglassée.
On en déduit que la N90 est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ G(N90)\end{array}}{\exists x\ G(x)}$$

Pour démontrer $\exists x\ P(x)$

- proposer un individu t
- démontrer $P(t)$
- inférer $\exists x\ P(x)$

Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la N90 est verglassée.
On en déduit que la N90 est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ G(N90)\end{array}}{\exists x\ G(x)}$$

Pour démontrer $\exists x\ P(x)$

- proposer un individu t
- démontrer $P(t)$
- inférer $\exists\ P(\ )$

Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la N90 est verglassée.
On en déduit que la N90 est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ G(N90)\end{array}}{\exists x\ G(x)}$$

Pour démontrer $\exists x\ P(x)$

- proposer un individu t
- démontrer $P(t)$
- inférer $\exists x\ P(x)$

Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la N90 est verglassée.
On en déduit que la N90 est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ G(N90)\end{array}}{\exists x\ G(x)}$$

Pour démontrer $\exists x\ P(x)$

- proposer un individu t , appelé un témoin
- démontrer $P(t)$
- inférer $\exists x\ P(x)$

Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la N90 est verglassée.
On en déduit que la N90 est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ G(N90)\end{matrix}}{\exists x\ G(x)}$$

Pour démontrer $\exists x\ P(x)$

- proposer un individu t , appelé un témoin
- démontrer $P(t)$
- inférer $\exists x\ P(x)$

Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la N90 est verglassée.
On en déduit que la N90 est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathsf{G}(\mathsf{N90})\end{array}}{\exists x\ \mathsf{G}(x)}$$

Pour démontrer $\exists x\ \mathsf{P}(x)$

- proposer un individu t , appelé un témoin
- démontrer $\mathsf{P}(t)$
- inférer $\exists x\ \mathsf{P}(x)$

Introduction d'une formule existentielle

Exemple

Nous sommes le 1er février à minuit : la N90 est verglassée.
On en déduit que la N90 est glissante, et donc que (dans l'univers du 1er février à minuit), il existe une route glissante.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ G(N90)\end{array}}{\exists x\ G(x)}$$

Pour démontrer $\exists x\ P(x)$

- proposer un individu t, appelé un témoin
- démontrer $P(t)$
- inférer $\exists x\ P(x)$

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\exists x G(x)$ = une route est glissante
- $\exists y G(y)$ = une route est glissante

$\longrightarrow$ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, … on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x D35, N90, N7, …
- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, … on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y D35, N90, N7, …

$\longrightarrow$ On peut conclure à $\exists x G(x)$
chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\exists x G(x)$ = une route est glissante
- $\exists y G(y)$ = une route est glissante

$\rightarrow$ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x D35, N90, N7, ...
- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On peut conclure à $\exists x G(x)$ chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\exists x G(x)$ = une route est glissante
- $\exists y G(y)$ = une route est glissante

$\longrightarrow$ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x D35, N90, N7, ...
- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y D35, N90, N7, ...

$\longrightarrow$ On peut conclure à $\exists x G(x)$ chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\exists x G(x)$ = une route est glissante
- $\exists y G(y)$ = une route est glissante

$\rightarrow$ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x D35, N90, N7, ...
- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On peut conclure à $\exists x G(x)$ chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\exists x G(x)$ = une route est glissante
- $\exists y G(y)$ = une route est glissante

$\longrightarrow$ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x D35, N90, N7, ...
- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y D35, N90, N7, ...

$\longrightarrow$ On peut conclure à $\exists x G(x)$
chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\exists x G(x)$ = une route est glissante
- $\exists y G(y)$ = une route est glissante

$\rightarrow$ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x D35, N90, N7, ...
- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On peut conclure à $\exists x G(x)$
chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\exists x G(x)$ = une route est glissante
- $\exists y G(y)$ = une route est glissante

$\rightarrow$ $\exists x G(x)$ et $\exists y G(y)$ ont même interprétation

- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists x G(x)$ en prenant comme témoin pour x D35, N90, N7, ...
- De $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... on peut conclure $\exists y G(y)$ en prenant comme témoin pour y D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On peut conclure à $\exists x G(x)$
chaque fois que l'on peut conclure à $\exists y G(y)$ et vice-versa

Élimination (utilisation) d'une formule existentielle

Informellement : pour utiliser l'information contenue dans $\exists x\ P(x)$, on se donne un tel individu – on le nomme y par exemple – et on travaille avec.

Plus formellement : que sait-on lorsque l'on a démontré $\exists x\ P(x)$?

- qu'il existe un individu vérifiant le prédicat P
- mais on ne sait pas lequel

Un peu comme pour $A \vee B$:

- on sait que l'un (au moins) parmi A et B est vérifié,
- mais on ne sait pas lequel

De même on considère tous les cas aboutissant à $\exists x\ P(x)$

- on suppose $P(x_0)$ pour un x_0 arbitraire
- sous cette hypothèse on démontre C

On peut alors inférer C à partir de $\exists x\ P(x)$

Élimination (utilisation) d'une formule existentielle

Informellement : pour utiliser l'information contenue dans $\exists x\ P(x)$, on se donne un tel individu – on le nomme y par exemple – et on travaille avec.

Plus formellement : que sait-on lorsque l'on a démontré $\exists x\ P(x)$?

- qu'il existe un individu vérifiant le prédicat P
- mais on ne sait pas lequel

Un peu comme pour $A \vee B$:

- on sait que l'un (au moins) parmi A et B est vérifié,
- mais on ne sait pas lequel

De même on considère tous les cas aboutissant à $\exists x\ P(x)$

- on suppose $P(x_0)$ pour un x_0 arbitraire
- sous cette hypothèse on démontre C

On peut alors inférer C à partir de $\exists x\ P(x)$

Élimination (utilisation) d'une formule existentielle

Informellement : pour utiliser l'information contenue dans $\exists x\ P(x)$, on se donne un tel individu – on le nomme y par exemple – et on travaille avec.

Plus formellement : que sait-on lorsque l'on a démontré $\exists x\ P(x)$?

- qu'il existe un individu vérifiant le prédicat P
- mais on ne sait pas lequel

Un peu comme pour $A \vee B$:

- on sait que l'un (au moins) parmi A et B est vérifié,
- mais on ne sait pas lequel

De même on considère tous les cas aboutissant à $\exists x\ P(x)$

- on suppose $P(x_0)$ pour un x_0 arbitraire
- sous cette hypothèse on démontre C

On peut alors inférer C à partir de $\exists x\ P(x)$

Élimination (utilisation) d'une formule existentielle

Informellement : pour utiliser l'information contenue dans $\exists x\ P(x)$, on se donne un tel individu – on le nomme y par exemple – et on travaille avec.

Plus formellement : que sait-on lorsque l'on a démontré $\exists x\ P(x)$?

- qu'il existe un individu vérifiant le prédicat P
- mais on ne sait pas lequel

Un peu comme pour $A \vee B$:

- on sait que l'un (au moins) parmi A et B est vérifié,
- mais on ne sait pas lequel

De même on considère tous les cas aboutissant à $\exists x\ P(x)$

- on suppose $P(x_0)$ pour un x_0 arbitraire
- sous cette hypothèse on démontre C

On peut alors inférer C à partir de $\exists x\ P(x)$

Élimination (utilisation) d'une formule existentielle

Informellement : pour utiliser l'information contenue dans $\exists x\ P(x)$, on se donne un tel individu – on le nomme y par exemple – et on travaille avec.

Plus formellement : que sait-on lorsque l'on a démontré $\exists x\ P(x)$?

- qu'il existe un individu vérifiant le prédicat P
- mais on ne sait pas lequel

Un peu comme pour $A \vee B$:

- on sait que l'un (au moins) parmi A et B est vérifié,
- mais on ne sait pas lequel

De même on considère tous les cas aboutissant à $\exists x\ P(x)$

- on suppose $P(x_0)$ pour un x_0 arbitraire
- sous cette hypothèse on démontre C

On peut alors inférer C à partir de $\exists x\ P(x)$

Introduction et élimination de ∃

$$\frac{P(t)}{\exists x\ P(x)}\ \exists_{\mathrm{I}}$$

$$\frac{\exists x\ P(x) \qquad \begin{array}{c} \overbrace{P(x_0)}^{[h]} \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \exists_{\mathrm{E}}[h]$$

Conditions d'application de $\exists_{\mathrm{E}}$

- Dans la preuve de C à partir de P( ),
  ne doit être libre dans aucune hypothèse disponible exceptée h.
- C ne doit pas dépendre de
  (c-à-d. ne doit pas comporter d'occurrence libre de)

Introduction et élimination de $\exists$

$$\dfrac{P(t)}{\exists x\ P(x)}\ \exists_I$$

$$\dfrac{\exists x\ P(x) \qquad \begin{array}{c} \overbrace{P(x_0)}^{[h]} \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \exists_E[h]$$

Conditions d'application de $\exists_E$

- Dans la preuve de C à partir de P( ), ne doit être libre dans aucune hypothèse disponible exceptée h.
- C ne doit pas dépendre de (c-à-d. ne doit pas comporter d'occurrence libre de)

Introduction et élimination de $\exists$

$$\frac{P(t)}{\exists x\ P(x)}\ \exists_I$$

$$\frac{\exists x\ P(x) \qquad \begin{array}{c} \overbrace{P(x_0)}^{[h]} \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \exists_E[h]$$

Conditions d'application de $\exists_E$

- Dans la preuve de C à partir de $P(x_0)$, x_0 ne doit être libre dans aucune hypothèse disponible exceptée h.
- C ne doit pas dépendre de x_0 (c-à-d. ne doit pas comporter d'occurrence libre de x_0)

Introduction et élimination de $\exists$

$$\frac{P(t)}{\exists x\ P(x)}\ \exists_I$$

$$\frac{\exists x\ P(x) \qquad \begin{matrix}\overbrace{P(x_0)}^{[h]}\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \exists_E[h]$$

Conditions d'application de $\exists_E$

- Dans la preuve de C à partir de $P(x_0)$, x_0 ne doit être libre dans aucune hypothèse disponible exceptée h.
- C ne doit pas dépendre de x_0 (c-à-d. ne doit pas comporter d'occurrence libre de x_0)

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit une route quelconque
- supposons que est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$
\dfrac{\overbrace{\exists r\ V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_E\left(\frac{x}{r_0}\right) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\ \Rightarrow_E}{\exists r\ G(r)}\ \exists_I}{\exists r\ G(r)}\ \exists_E[6]
$$

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit une route quelconque
- supposons que est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$\dfrac{\overbrace{\exists r\ V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_E(\tfrac{x}{r_0}) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\ \Rightarrow_E}{\exists r\ G(r)}\ \exists_I}{\exists r\ G(r)}\ \exists_E[6]$$

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit r_0 une route quelconque
- supposons que r_0 est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, r_0 est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$\dfrac{\overbrace{\exists r\, V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\, V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\,\forall_E(\tfrac{x}{r_0}) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\,\Rightarrow_E}{\exists r\, G(r)}\,\exists_I}{\exists r\, G(r)}\,\exists_E[6]$$

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit r_0 une route quelconque
- supposons que r_0 est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, r_0 est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$\dfrac{\overbrace{\exists r\, V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\, V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\,\forall_E\left(\frac{x}{r_0}\right) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\,\Rightarrow_E}{\exists r\, G(r)}\,\exists_I}{\exists r\, G(r)}\,\exists_E[6]$$

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit r_0 une route quelconque
- supposons que r_0 est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, r_0 est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$\dfrac{\overbrace{\exists r\ V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_E\left(\frac{x}{r_0}\right) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\ \Rightarrow_E}{\exists r\ G(r)}\ \exists_I}{\exists r\ G(r)}\ \exists_E[6]$$

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit r_0 une route quelconque
- supposons que r_0 est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, r_0 est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$\dfrac{\overbrace{\exists r\ V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_E(\tfrac{x}{r_0}) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\ \Rightarrow_E}{\exists r\ G(r)}\ \exists_I}{\exists r\ G(r)}\ \exists_E[6]$$

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit r_0 une route quelconque
- supposons que r_0 est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, r_0 est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$\dfrac{\overbrace{\exists r\ V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_E(\tfrac{x}{r_0}) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\ \Rightarrow_E}{\exists r\ G(r)}\ \exists_I}{\exists r\ G(r)}\ \exists_E[6]$$

Exemple

S'il existe une route verglassée, alors il existe une route glissante.

- soit r_0 une route quelconque
- supposons que r_0 est verglassée
- comme toute route verglassée est glissante, r_0 est glissante
- donc il existe une route glissante

Donc, sous l'hypothèse qu'il existe une route verglassée, il existe une route glissante.

$$
\dfrac{\overbrace{\exists r\ V(r)}^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_E(\tfrac{x}{r_0}) \qquad \overbrace{V(r_0)}^{[6]}}{G(r_0)}\ \Rightarrow_E}{\exists r\ G(r)}\ \exists_I}{\exists r\ G(r)}\ \exists_E[6]
$$