

INF122 2004-2005

Examen final, session de mai

Documents autorisés. Barème indicatif. Durée 2 heures.

Exercice 1 (12 pts)

Rappels :

- \perp est l'absurde
- $\neg\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi \Rightarrow \perp$
- $x \neq y \stackrel{\text{déf}}{=} \neg(x = y)$;
- \emptyset est l'ensemble vide : $x \in \emptyset \stackrel{\text{déf}}{=} \perp$
- $E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=} \forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$

Par définition, on dit qu'un ensemble est habité s'il y a au moins un élément qui lui appartient.

1.1 (6 pts) Démontrer en déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve :

- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- $\neg(\exists a, a \in A) \Rightarrow A \subseteq \emptyset$
- $(\exists a a \in A) \Rightarrow A \neq \emptyset$

1.2 (2 pts) Représenter par une formule chacune des propositions suivantes, où A est un ensemble :

- A est non vide
- A est habité

1.3 (4 pts) En utilisant le tiers exclu ou l'élimination de la double négation, démontrer qu'un ensemble est non vide si et seulement s'il est habité. Il est possible (et recommandé) d'utiliser les résultats du 1.1. La rédaction peut être sous forme soit textuelle, soit d'arbre de preuve.

Exercice 2 (8 pts)

On considère trois éléments différents a , b et c ; on pose $I = \{1, 2\}$ et $A = \{a, b, c\}$.

2.1 (1 pt) Donner en extension le produit cartésien $A \times A$ (c'est-à-dire : énumérer ses éléments entre accolades).

2.2 (2 pts) Parmi les relations suivantes, vues comme sous-ensembles de $I \times A$, lesquelles sont des fonctions ? des applications (fonctions totales) ? des fonctions injectives ? des fonctions surjectives ?

- $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(2, a)\}$
- $R_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, a), (2, b), (1, c)\}$
- $R_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, b), (2, b)\}$
- $R_4 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, a), (2, c)\}$
- $R_5 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(1, c), (2, b)\}$

Si E et F sont deux ensembles quelconques, on note $E \rightarrow F$ l'ensemble des applications de E vers F . On rappelle que si f est un élément de $E \rightarrow F$, et x est un élément de E , il existe un unique élément y de F tel que $(x, y) \in f$ que l'on note $f(x)$.

2.3 (1 pt) Donner $I \rightarrow A$ en extension (énumérer ses éléments entre accolades).

2.4 (1 pt) Soit φ l'application de $I \rightarrow A$ dans $A \times A$ définie par : $\varphi(f) = (f(1), f(2))$. Par exemple, on a : $\varphi(R_3) = (b, b)$ et $\varphi(R_4) = (a, c)$.
Que vaut $\varphi(R_5)$?

2.5 (3 pts) Soit B un ensemble quelconque, et soit ψ l'application de $I \rightarrow B$ dans $B \times B$ définie par $\psi(f) = (f(1), f(2))$.
Montrer que ψ est une application bijective.