# INF122 2004-2005

# Examen final, session de mai

# Corrigé

*Documents autorisés. Barème indicatif. Durée 2 heures.*

## Exercice 1 (12 pts)

Rappels :
- $\bot$ est l'absurde
- $\neg\varphi \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \varphi \Rightarrow \bot$
- $x \neq y \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \neg(x = y)$ ;
- $\emptyset$ est l'ensemble vide : $x \in \emptyset \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \bot$
- $E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$

Par définition, on dit qu'un ensemble est habité s'il y a au moins un élément qui lui appartient.

**1.1 (6 pts)** Démontrer en déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve :
- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- $\neg(\exists a, a \in A) \Rightarrow A \subseteq \emptyset$
- $(\exists\, a\; a \in A) \Rightarrow A \neq \emptyset$

### Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P \Rightarrow Q}^{[1]} \qquad \overbrace{P}^{[3]}}{Q}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{E}}} \qquad \overbrace{Q \Rightarrow \bot}^{[2]}}{\bot}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{E}}}}{\neg P}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]}}{\neg Q \Rightarrow \neg P}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]}}{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{x_0 \in A}^{[2]}}{\exists\, a\; a \in A)}{\scriptstyle \exists_{\mathrm{I}}} \qquad \overbrace{\neg(\exists\, a\; a \in A))}^{[1]}}{\bot}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{E}}}}{x_0 \in \emptyset}{\scriptstyle \emptyset\,\text{déf}}}{x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in \emptyset}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]}}{\forall x\; x \in A \Rightarrow x \in \emptyset}{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}}{\neg(\exists\, a\; a \in A) \Rightarrow (A \subseteq \emptyset)}{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\overbrace{\exists\, a\; a \in A}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{a_0 \in A}^{[2]} \qquad \overbrace{A = \emptyset)}^{[3]}}{a_0 \in \emptyset}\;{=_{\mathrm{E}}}}{\bot}\;\emptyset\text{ déf}}{\neg(A = \emptyset)}\;{\Rightarrow_{\mathrm{I}}[3]}}{\neg(A = \emptyset)}\;{\exists_{\mathrm{E}}[2]}}{(\exists\, a\; a \in A) \Rightarrow \neg(A = \emptyset)}\;{\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}
$$

**1.2 (2 pts)** Représenter par une formule chacune des propositions suivantes, où $A$ est un ensemble :
- $A$ est non vide
- $A$ est habité

**Corrigé**

- $\neg(A = \emptyset)$
- $\exists\, a\; a \in A$

**1.3 (4 pts)** En utilisant le tiers exclu ou l'élimination de la double négation, démontrer qu'un ensemble est non vide si et seulement s'il est habité. Il est possible (et recommandé) d'utiliser les résultats du 1.1. La rédaction peut être sous forme soit textuelle, soit d'arbre de preuve.

**Corrigé**

Il faut démontrer $\neg(A = \emptyset) \Leftrightarrow \exists\, a\; a \in A$, c'est-à-dire $\neg(A = \emptyset) \Rightarrow \exists\, a\; a \in A$ et $\exists\, a\; a \in A \Rightarrow \neg(A = \emptyset)$.
- $\neg(A = \emptyset) \Rightarrow \exists\, a\; a \in A$ : préparons d'abord le terrain ;
  en prenant $A \subseteq \emptyset$ pour $Q$ et $\neg(\exists\, a\; a \in A)$ pour $P$ dans l'exercice 1.1, 1ère formule, et par *modus ponens* ($\Rightarrow_{\mathrm{E}}$) avec l'exercice 1.1, 2ème formule, on obtient
  $$\neg(A \subseteq \emptyset) \Rightarrow \neg\neg(\exists\, a\; a \in A); \tag{1}$$
  d'autre part, en prenant $A \subseteq \emptyset$ pour $Q$ et $A = \emptyset$ pour $P$ dans l'exercice 1.1, 1ère formule, on obtient, sachant $\emptyset \subseteq A$,
  $$\neg(A = \emptyset) \Rightarrow \neg(A \subseteq \emptyset); \tag{2}$$
  maintenant, pour démontrer $\neg(A = \emptyset) \Rightarrow \exists\, a\; a \in A$, supposons $\neg(A = \emptyset)$ ; en utilisant (2), on en déduit $\neg(A = \emptyset)$ puis $\neg\neg(\exists\, a\; a \in A)$ en utilisant (1), et enfin $\exists\, a\; a \in A$ par élimination de la double négation, cqfd ;
- $\exists\, a\; a \in A \Rightarrow \neg(A = \emptyset)$ : exercice 1.1, 3ème formule

## Exercice 2 (8 pts)

On considère trois éléments différents $a$, $b$ et $c$ ; on pose $I = \{1,2\}$ et $A = \{a,b,c\}$.

**2.1 (1 pt)** Donner en extension le produit cartésien $A \times A$ (c'est-à-dire : énumérer ses éléments entre accolades).

**Corrigé**

$\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

**2.2 (2 pts)** Parmi les relations suivantes, vues comme sous-ensembles de $I \times A$, lesquelles sont des fonctions ? des applications (fonctions totales) ? des fonctions injectives ? des fonctions surjectives ?

- $R_1 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(2,a)\}$
- $R_2 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1,a),(2,b),(1,c)\}$
- $R_3 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1,b),(2,b)\}$
- $R_4 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1,a),(2,c)\}$
- $R_5 \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(1,c),(2,b)\}$

**Corrigé**

- fonctions : toutes sauf $R_2$
- applications : $R_3$, $R_4$, $R_5$
- fonctions injectives : $R_4$, $R_5$
- fonctions surjectives : aucune

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles quelconques, on note $E \to F$ l'ensemble des applications de $E$ vers $F$. On rappelle que si $f$ est un élément de $E \to F$, et $x$ est un élément de $E$, il existe un unique élément $y$ de $F$ tel que $(x,y) \in f$ que l'on note $f(x)$.

**2.3 (1 pt)** Donner $I \to A$ en extension (énumérer ses éléments entre accolades).

**Corrigé**

$$\begin{aligned} I \to A \;=\; \{&\{(1,a),(2,a)\},\{(1,a),(2,b)\},\{(1,a),(2,c)\},\\ &\{(1,b),(2,a)\},\{(1,b),(2,b)\},\{(1,b),(2,c)\},\\ &\{(1,c),(2,a)\},\{(1,c),(2,b)\},\{(1,c),(2,c)\}\} \end{aligned}$$

**2.4 (1 pt)** Soit $\varphi$ l'application de $I \to A$ dans $A \times A$ définie par : $\varphi(f) = (f(1), f(2))$. Par exemple, on a : $\varphi(R_3) = (b,b)$ et $\varphi(R_4) = (a,c)$. Que vaut $\varphi(R_5)$ ?

**Corrigé**

$\varphi(R_5) = (c, b)$

**2.5 (3 pts)** Soit $B$ un ensemble quelconque, et soit $\psi$ l'application de $I \to B$ dans $B \times B$ définie par $\psi(f) = (f(1), f(2))$.
Montrer que $\psi$ est une application bijective.

**Corrigé**

Il reste à montrer que $\psi$ est injective et surjective.
Pour l'injectivité, soient deux fonctions $f$ et $g$ de $I \to B$, telles que $\psi(f) = \psi(g)$. Par définition de $\psi$, cela donne $(f(1), f(2)) = (g(1), g(2))$, et ensuite, par la propriété des couples : $f(1) = g(1)$ et $f(2)) = g(2)$. On a alors $f = \{(1, f(1)), (2, f(2))\} = \{(1, g(1)), (2, g(2))\} = g$.
Pour la surjectivité, soit $(x, y)$ un couple quelconque de $B \times B$, il faut trouver une application $f$ de $I \to B$ telle que $\psi(f) = (x, y)$. L'application $f \overset{\text{déf}}{=\!=} \{(1, x), (2, y)\}$ convient.