

DEA ISC  
Rapport de Stage

Etude d'un Modèle de Contrôleur  
Hybride

Alexandre Donzé

14 juin 2003



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Problème concret et problème formel</b>	<b>6</b>
2.1	Le générateur de vapeur (GV)	6
2.1.1	Fonctionnement global	6
2.1.2	Problématiques	7
2.1.3	Modélisation	8
2.1.4	Scénarii	10
2.1.5	Spécifications	10
2.2	Difficultés	11
2.3	Problème formel dérivé	11
2.3.1	Formulation	11
2.4	Problèmes	13
<b>3</b>	<b>Étude du problème formel</b>	<b>15</b>
3.1	Introduction	15
3.2	Étude d'un exemple simple	15
3.2.1	Spécification des perturbations	16
3.3	Cas du SHLM approchant la dynamique du GV	20
3.3.1	Modèle utilisé	20
3.3.2	Contrôleur	22
3.4	Vérification du contrôleur de $\mathcal{S}_{GV}^n$	23
3.4.1	Graphe des transitions	24
3.4.2	Vérification du cas 1	25
3.4.3	Vérification du cas 2	29
3.4.4	Algorithme	31
3.4.5	Cas problématiques lorsque $\alpha > 0$	33
<b>4</b>	<b>Observateurs</b>	<b>35</b>
4.1	Observateurs et systèmes linéaires	35
4.2	Observateurs et détection d'erreurs	37
4.2.1	Fonction résidu	37
4.2.2	Automate de décision	38
4.2.3	Exemple dans le cas de $S_{50}$	39
4.3	Application au cas hybride	40
4.4	Conclusion	42
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Ce travail s'est déroulé dans le cadre du projet Computation and Control auquel participent entre autres partenaires le laboratoire Verimag et EDF. Le but du projet CC est de développer de nouvelles méthodes pour la conception et l'étude de contrôleurs pour des systèmes complexes et hétérogènes mélangeant des dynamiques continues et discrètes. Ces systèmes sont appelés systèmes hybrides et leurs propriétés ont été étudiées ces dernières années aussi bien par des informaticiens que par des spécialistes de la théorie du contrôle. Pour garder un équilibre entre théorie et pratique, des études de cas sont proposées par les partenaires industriels de ce projet.

Ainsi, ce travail s'intéresse à l'étude de cas proposée par EDF concernant la conception d'un contrôleur critique dans une centrale nucléaire. L'étude de cas se compose d'un simulateur Simulink de la partie de la centrale à contrôler muni de différents scénarii de perturbation que le contrôleur à concevoir doit prendre en charge. En plus de la problématique du contrôle d'une dynamique complexe, s'ajoute celle de la tolérance aux fautes puisque le modèle fait intervenir des capteurs susceptibles de défaillances.

Les difficultés posées par ce problème et en particulier la flexibilité restreinte du simulateur proposé m'ont amené à aborder ce travail en suivant les étapes suivantes :

- Première étape : prise de connaissance du problème et en particulier mise en évidence de ses caractéristiques hybrides ;
- Deuxième étape : modélisation du problème par une classe de systèmes hybrides, de type automates hybrides à dynamiques linéaires, adaptée à l'étude de cas ;
- Troisième étape : formulation théorique d'un problème de contrôle et en particulier de vérification d'un contrôleur pour cette classe d'automates hybrides ;
- Quatrième étape : étude de ce problème théorique et conception d'un algorithme le résolvant sous certaines conditions ;
- Cinquième étape : étude du problème de la tolérance aux fautes ;

Les différentes parties composant ce rapport décrivent ces étapes.



## Chapitre 2

# Problème concret et problème formel

### Introduction

Dans cette section, je décris le problème de contrôle proposé par EDF dans le cadre du projet CC et présenté comme un benchmark pour les méthodes de contrôle hybride. J'y met en avant les difficultés que ce problème pose et j'en dérive un problème plus formalisé et plus flexible. La spécification originale du problème est donnée dans [1].

## 2.1 Le générateur de vapeur (GV)

### 2.1.1 Fonctionnement global

La Figure 2.1 donne une description du système complet comprenant principalement un réacteur, un générateur de vapeur, une turbine et un condenseur.

Le fonctionnement global de l'ensemble est intuitivement simple : le réacteur sert à chauffer l'eau présente dans le générateur de vapeur, la vapeur produite actionne la turbine qui induit une production d'électricité via un alternateur. Elle est ensuite condensée dans le condenseur et l'eau résultante retourne dans le GV.

L'évolution du système est régie par deux actionneurs : une valve contrôlant l'arrivée de vapeur dans la turbine et une valve contrôlant l'arrivée (ou le retour) de l'eau dans le GV. Ces deux actionneurs sont en concurrence : le premier est actionné par le monde extérieur en fonction de la demande en électricité et le deuxième est actionné par la commande interne du réacteur pour s'adapter aux fluctuations de cette demande. C'est donc cette deuxième valve qui devra être actionnée automatiquement par le contrôleur hybride.

Le paramètre critique ici est le niveau d'eau dans le générateur de vapeur. Il doit dans l'idéal rester proche d'une certaine valeur (que l'on peut poser égale à zéro) quelles que soient les fluctuations du flux de vapeur. Cela signifie que le flux d'eau doit être capable de suivre et de compenser ces fluctuations.

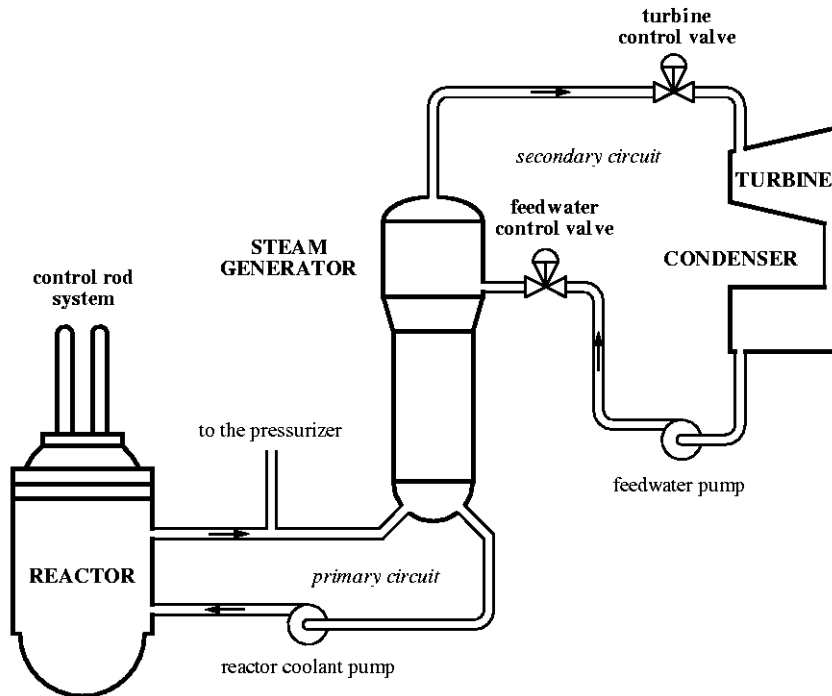


FIG. 2.1 – Vue d’ensemble du réacteur

### 2.1.2 Problématiques

Deux problématiques principales se posent :

- **La dynamique du système** : elle n’est pas linéaire et dépend de la puissance dégagée par le réacteur. Si l’on note  $\mathcal{P}_n$  sa puissance maximale (ou puissance nominale), nous verrons que nous ne disposons en fait pour la conception du contrôleur que d’une approximation linéaire de la dynamique lorsque le réacteur fonctionne à  $10\% \mathcal{P}_n$  et à  $80\% \mathcal{P}_n$ .
- **La fiabilité des mesures** : les données physiques du système sont mesurées à l’aide d’un certain nombre de capteurs qui sont, comme tous les appareils physiques, susceptibles d’être défaillants à n’importe quel moment. Plusieurs capteurs sont donc utilisés pour une même donnée. Le contrôleur doit donc être capable de combiner les mesures fournies par l’ensemble des capteurs pour pouvoir compenser le plus rapidement possible une défaillance éventuelle de l’un d’entre eux. D’autre part, la fiabilité de certains capteurs dépend du niveau de puissance du réacteur. A basse puissance, ils doivent être remplacés par un autre moyen de mesure.



### 2.1.3 Modélisation

#### Dynamique linéaire

Le modèle proposé de la dynamique du système comprend quatre variables : le flux de vapeur  $Q_v$  sortant du générateur de vapeur, le flux d'eau rentrant  $Q_e$  et deux types de mesure du niveau d'eau, le premier donne le niveau de mélange eau-vapeur  $N_{ge}$  et le deuxième,  $N_{gl}$  reflète la masse d'eau à l'intérieur du générateur (l'interprétation physique approximative de ces paramètres n'aura que peu d'importance par la suite. En particulier, on ne se formalisera pas si  $N_{gl}$  a tendance à devenir négatif).

Ces variables sont regroupées dans un vecteur de dimension 4,

$$\mathbf{y}(t) = (N_{ge}, N_{gl}, Q_v, Q_e)^T$$

, et un modèle linéaire de la dynamique d'évolution de ces variables lorsque le réacteur fonctionne à un niveau de puissance proche d'un niveau donné est de la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_g} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\tau_n} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\beta_g}{\tau_g} \end{pmatrix} d(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta_1 & \beta_0 & 1 \\ 0 & \frac{\tau_n}{\tau_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d(t) \quad (2.2)$$

Il s'agit donc d'un système linéaire avec commande  $u(t)$  et une perturbation  $d(t)$ . Remarquons que la perturbation  $d(t)$  est exactement  $y_3(t) = Q_v(t)$ . En fait,  $d$  est compris entre 0 et 100 et représente par la même occasion le pourcentage de la puissance nominale du réacteur. Les coefficients de matrices sont donnés pour  $10\%P_n$  et  $80\%P_n$ . A titre indicatif, ils sont donnés dans le tableau suivant :

	$\tau_e$	$\tau_n$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\tau_g$	$\beta_g$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\tau_i$
$10\%P_n$	2.433	21.74	0.171	0.025	2.409	0.99	-0.023	0.068	701.2
$80\%P_n$	5.435	13.89	0.983	0.811	4.167	1.325	-0.208	0.106	694.4444

On note d'une manière générale :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_g} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tau_e} \\ -\frac{1}{\tau_n} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{\beta_g}{\tau_g} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta_1 & \beta_0 & 1 \\ 0 & \frac{\tau_n}{\tau_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

En particulier, on note  $A_{80}$ ,  $B_{80}$ , et  $C_{80}$  (respectivement  $A_{10}$ ,  $B_{10}$ , et  $C_{10}$ ) les trois matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  pour lesquelles on a remplacé les valeurs des différents coefficients à 80% $\mathcal{P}_n$  (respectivement à 10% $\mathcal{P}_n$ ) suivant le tableau.

La variable critique à contrôler est  $y_1 = N_{ge}$ . Celle-ci doit rester le plus possible autour de 0 suivant des spécifications que l'on précise plus bas. La figure 2.2 montre la réponse du système sans contrôle à une variation de 5% de la puissance du réacteur à haute et basse puissance.

Du fait que l'objectif ne porte que sur la première coordonnée de  $\mathbf{y}$ ,  $N_{ge}$ , on peut, du point de vue du contrôle ne considérer que cette variable :

$$y(t) = (0 \quad 1 \quad \beta_1 \quad \beta_0 \quad 1) \mathbf{x}(t) = \mathbf{c} \mathbf{x} \quad (2.5)$$

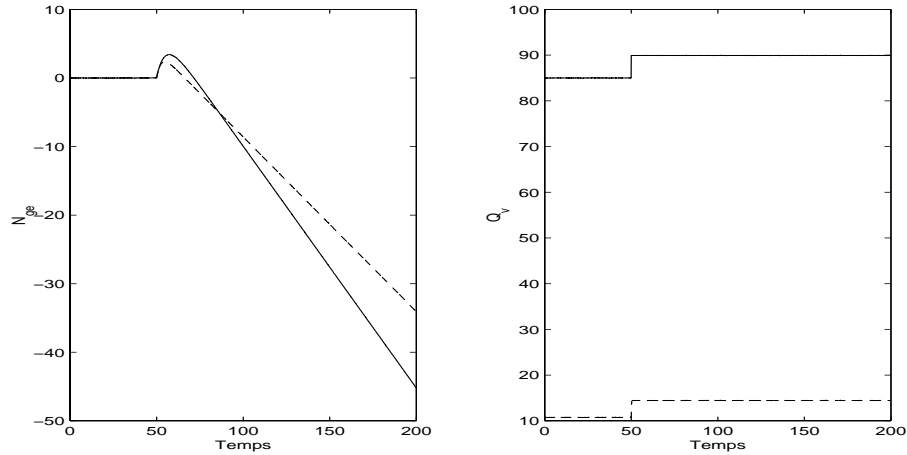


FIG. 2.2 – A  $t=50$ , la perturbation  $d$  augmente de 5 (figure de droite). Les deux courbes de gauche montrent l'évolution du niveau d'eau  $N_{ge}$  à haute puissance (courbe pleine) et basse puissance (courbe pointillée).

### Les capteurs

Les capteurs disponibles pour la mesure des quatres variables sont les suivants :

- $Q_e$  deux capteurs et une estimation ;
- $Q_v$  deux capteurs et une estimation ;
- $N_{ge}$  trois capteurs ;
- $N_{gl}$  un capteur ;

Pour les flux  $Q_e$  et  $Q_v$ , les capteurs sont fiables à haut régime mais pas à bas régime. Dans ce dernier cas, il faut utiliser les estimations. Notons enfin que dans le cas général, les capteurs ont tous un biais (dû à des calibrages différents par exemple) ce qui fait que deux capteurs mesurant la même grandeur ne donnent jamais la même valeur.

### 2.1.4 Scénarii

Pour tester le contrôleur, on dispose d'un modèle Simulink du réacteur disposant d'un certain nombre de scénarii d'évolution de la perturbation :

- T1.** Un saut de +5% de  $Q_v$  à partir de 85% $\mathcal{P}_n$
- T2.** Un saut de +5% de  $Q_v$  à partir de 10% $\mathcal{P}_n$
- T3.** Un saut de +5% de  $Q_v$  à partir de 5% $\mathcal{P}_n$
- T4.** Un saut de -3% de  $Q_v$  à partir de 10% $\mathcal{P}_n$
- T5.** Une rampe de -15%/minute de  $Q_v$  à partir de 90% $\mathcal{P}_n$
- T6.** Un saut de -30% de  $Q_v$  à partir de 60% $\mathcal{P}_n$

et de défaillance de capteurs :

- F1.** Cas idéal : aucune défaillance, aucun biais
- F2.** Cas standard : aucune défaillance, mais un biais indépendant est appliqué à chaque mesure
  - F2.1** Une dérive lente affecte un des capteurs mesurant  $Q_e$
  - F2.2** Une dérive rapide affecte un des capteurs mesurant  $Q_e$
  - F2.3** Une dérive lente affecte un des capteurs mesurant  $Q_v$
  - F2.4** Une dérive rapide affecte un des capteurs mesurant  $Q_v$
  - F2.5** Une dérive lente affecte un des capteurs mesurant  $N_{ge}$
  - F2.6** Une dérive rapide affecte un des capteurs mesurant  $N_{ge}$
  - F2.7** Une dérive rapide affecte un des capteurs mesurant  $N_{gl}$

### 2.1.5 Spécifications

Le contrôleur doit respecter les spécifications suivantes :

- S1.** L'amplitude de l'erreur sur le niveau  $N_{ge}$  ne doit pas dépasser 5.
- S2.** L'erreur doit être corrigée en moins de 100 secondes, elle doit alors être comprise entre -0.5 et +0.5
- S3.** La saturation du signal de contrôle est  $[u_{min}, u_{max}] = [4, 120]$

Pour les scénarii **T5** et **T6**, les spécifications **S1** et **S2** sont remplacées par les spécifications plus lâches :

**SR1.** L'amplitude de l'erreur sur le niveau  $N_{ge}$  ne doit pas dépasser 10.

**SR2.** L'erreur doit être corrigée en moins de 150 secondes, elle doit alors être comprise entre -0.5 et +0.5

La description du problème [1] contient deux spécifications supplémentaires, **S4** sur le délai de réaction du contrôleur, et **S5** spécifiant que celui-ci devait être en temps discret, dont je n'ai pas tenu compte dans ce travail. En particulier, j'ai préféré en un premier temps travailler en temps continu.

## 2.2 Difficultés

Comme évoqué plus haut, l'une des principales difficultés soulevées par ce problème est la dynamique complexe non linéaire du réacteur. Les linéarisations autour de deux points de fonctionnement éloignés du système sont bien peu de choses pour garantir quoi que ce soit sur la validité d'un éventuel contrôleur. D'autre part, même si un contrôleur satisfait toutes les spécifications sur l'ensemble des scénarii (c'est-à-dire les 6 scénarii, ou 6\*9 si l'on compte les pannes de capteurs), cela prouve-t-il que ce contrôleur est garanti fiable? Or le modèle Simulink du réacteur dont on dispose n'offre aucune flexibilité pour créer d'autres jeux de test.

Ces réflexions, en plus des caractéristiques hybrides évidentes du problème (le fait qu'il soit déjà approché par une sorte de linéarisation grossière par (deux) morceaux, les commutations induites par les changements de capteurs lorsque l'un d'eux devient défectueux) m'ont amené à recréer un modèle à base d'automates hybrides linéaires, donc entièrement connu et modifiable, pour lequel je pose un problème de contrôle similaire à celui du générateur de vapeur.

## 2.3 Problème formel dérivé

### 2.3.1 Formulation

#### Systèmes hybrides considérés

On s'intéresse au problème de contrôle d'un système hybride linéaire par modes, avec perturbations (noté SHLM) défini de la manière suivante :

**Définition 1** *Un SHLM est défini par la donnée de :*

- *Un vecteur d'état  $\mathbf{x}$  évoluant dans un espace  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  ;*
- *Un vecteur de variables mesurées  $\mathbf{y}$  évoluant dans un espace  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$  ;*
- *Une fonction de contrôle  $u$  évoluant dans  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  ;*
- *Une fonction de perturbation  $d$  évoluant dans  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  ;*

- Une famille finie  $\mathcal{S}$  de triplets  $S^d = (A^d, B^d, C^d)$  de matrices indicées par  $d$  décrivant la dynamique du système :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A^d \mathbf{x} + B^d \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} = C^d \mathbf{x} \end{cases} \quad (2.6)$$

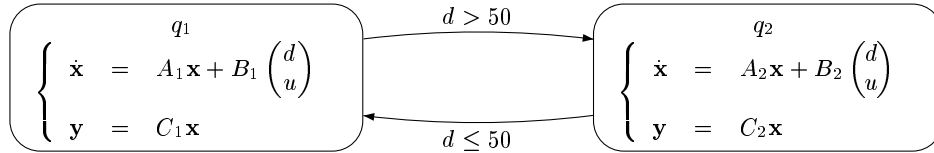
- Un ensemble  $I_0 \subset \mathcal{X}$  de conditions initiales.

Par la suite, on désignera souvent de tels systèmes par leur ensemble  $\mathcal{S}$  de dynamiques plutôt que par un six-ou-septuplet  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}, \mathcal{D}, \mathcal{S}, I_0)$ . Par défaut et sauf mention particulière, les ensembles  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  seront égaux à  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ .

Le fait que la famille  $\mathcal{S}$  soit finie est ce qui donne son caractère hybride au système. Ainsi, le premier cas non trivial est celui où elle contient deux éléments  $S_1$  et  $S_2$ . Pour fixer les idées, disons que le système suit la dynamique  $S_1$  si  $d$  est en dessous d'un certain seuil (par exemple 50) et la dynamique  $S_2$  si il est au dessus :

$$S^d = \begin{cases} S_1 & \text{si } d \leq 50 \\ S_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système peut alors être représenté par un automate hybride simple à deux états :



### Fonction d'indice

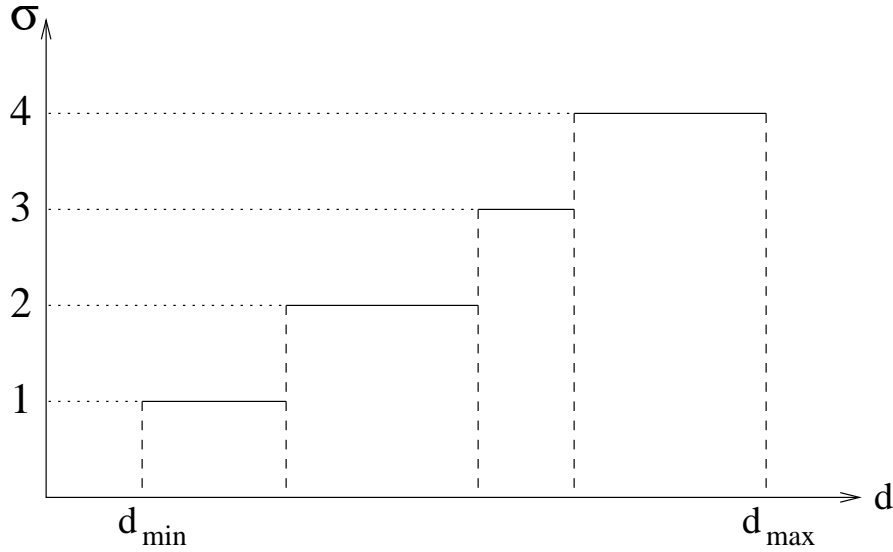
On peut définir une fonction d'indice  $\sigma$ , et à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{N} \\ d &\mapsto \sigma(d) \end{aligned}$$

Cette fonction associe à une valeur de la perturbation  $d(t)$  un indice entier correspondant donc à un état, ou mode, ou une dynamique du SHLM.

Rien n'oblige  $\sigma$  a priori à être simple : on peut imaginer par ce formalisme des systèmes suivant une dynamique  $S_0$  si  $d$  est rationnel et une dynamique  $S_1$  sinon, autrement dit où  $\sigma$  serait la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$  mais cela présenterait, outre des difficultés théoriques importantes, assez peu d'intérêt. Le plus souvent,  $\sigma$  sera donc simplement strictement croissante et constante par

morceaux donc de la forme suivante :



La famille  $\mathcal{S}$  peut donc être indexée soit par  $d$ , ce qui a l'avantage de montrer la relation entre le mode et la perturbation, soit par  $\sigma(d)$  si on préfère les indices entiers. Dans l'exemple ci-dessus,

$$\sigma(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \leq 50 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

### Solutions

Si on se fixe une loi de contrôle  $u : \mathcal{X} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$ , qui à un état  $\mathbf{x}(t)$  et à une perturbation  $d(t)$  associe une valeur de contrôle  $u(t)$ , si on se donne un signal de perturbation  $d : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D}$  et si enfin on choisit un vecteur  $\mathbf{x}_0 \in I_0$ , alors il est important de remarquer que le système admet une unique solution  $\mathbf{y} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{Y}$ . On dira que  $\mathbf{y}$  est la solution du système  $(\mathcal{S}, u, d)$ .

### Liens avec le modèle précédent

La similitude avec le modèle décrit dans la section précédente est claire : si on pose dans l'exemple ci-dessus  $S_1 = (A_{10}, B_{10}, C_{10})$  et  $S_2 = (A_{80}, B_{80}, C_{80})$ , on obtient un modèle hybride qui simule d'une certaine manière le système initial. On peut donc espérer que travailler sur ce modèle hybride approché mais entièrement déterminé peut donner des indications utiles sur le modèle 'réel'. D'autre part, en supposant qu'on dispose d'autres valeurs des coefficients des matrices  $A, B$  et  $C$  pour d'autres points de fonctionnement du réacteur, on peut rajouter des états au modèle hybride pour améliorer l'approximation.

## 2.4 Problèmes

$d$  est un paramètre de *perturbations*. Cela signifie que

1. il est d'origine extérieur au système

2. il est incontrôlable et
3. il est imprévisible.

$u$  est un paramètre de *contrôle*. Il est donc aussi d'origine extérieur au système mais il fournit au concepteur ou au superviseur du système un degré de liberté pour influencer sur son évolution dans le temps.

$\mathbf{x}$  est l'ensemble des *variables internes* du système. Celles-ci ne sont donc pas a priori accessibles ou mesurables directement.

Les *variables mesurées* sont contenues dans le vecteur  $\mathbf{y}$ . Si on se fixe en plus des données précédentes un vecteur  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$  de signaux de référence, une problématique générale dans le domaine du contrôle est alors la suivante :

Comment déterminer  $u(t)$  pour tout  $t \in [0, \infty)$  tel que quel que soit la perturbation  $d(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  soit proche du signal de référence  $\mathbf{r}(t)$  ?

Le problème ainsi exprimé est celui de la synthèse d'un contrôleur. Un autre problème intéressant, lié au premier, est celui de la vérification d'un contrôleur existant :

Etant donnée une loi de contrôle  $u(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  est-il suffisamment proche de  $\mathbf{r}(t)$  quel que soit la perturbation  $d(t)$  ?

Nous allons examiner dans la partie suivante dans quelle mesure on est capable de résoudre ce second problème dans le cadre du formalisme ci-dessus.

## Chapitre 3

# Étude du problème formel

### 3.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons étudier principalement le problème de vérification de la conformité d'un contrôleur à des spécifications pour les systèmes définis dans la partie précédente. Nous commençons par étudier le comportement d'un exemple simple donnant une idée des enjeux et des difficultés de ce problème notamment à cause de son hybridité. A la suite de cet exemple nous formalisons plus précisément le problème en paramétrisant les signaux de perturbation et les spécifications. En deuxième moitié de cette partie, on développe une méthode pour résoudre la question posée dans le cas des SHLM approximant la dynamique du GV de la partie précédente. En fin de partie, nous dérivons un algorithme de cette méthode en en donnant les limitations.

### 3.2 Étude d'un exemple simple

Dans cette section, nous allons étudier le comportement d'un exemple très simple pour lequel le problème de contrôle ne cause aucune difficulté mais qui met en évidence les problèmes qui apparaissent dû au caractère hybride du système.

Considérons donc le système hybride  $S_1$  composé de deux états avec les dynamiques  $S_1$  :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.1)$$

et  $S_2$  :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.2)$$

quasiment identiques, donc.

Il est facile de calculer analytiquement la solution de chacun de ces systèmes sur



un intervalle quelconque du type  $[t_0, t_1]$ . Appelons  $y_1$  et  $y_2$  de telles solutions pour les systèmes respectifs  $S_1$  et  $S_2$ . On a  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :

$$y_1(t) = (x_1(t_0) + x_2(t_0)) e^{-t} + \int_{t_0}^t e^{s-t} (d(s) + u(s)) ds \quad (3.3)$$

$$y_2(t) = \left( x_1(t_0) + \frac{1}{2}x_2(t_0) \right) e^{-t} + \int_{t_0}^t e^{2(s-t)} \left( d(s) + \frac{1}{2}u(s) \right) ds \quad (3.4)$$

Considérons que l'objectif est d'annuler  $y$ , il est aussi facile, connaissant la perturbation  $d$  de trouver une loi de contrôle pour chaque système qui satisfait cet objectif. Il suffit de prendre  $u_1(t) = -d(t)$  pour  $S_1$  et  $u_2(t) = -2d(t)$  pour  $S_2$ . Ainsi dans les deux cas, le terme intégral contenant les perturbations est annulé et la solution converge de manière exponentielle vers 0 et ce quelle que soit la nature de la perturbation.

Maintenant, que se passe-t-il si le système doit transiter d'un mode à l'autre? Supposons par exemple que sur  $[0, t_1]$  on ait  $d = 40$  et que sur  $]t_1, \infty[$ ,  $d = 60$ . La solution globale  $y$  vaut alors :

$$y(t) = \begin{cases} (x_1(0) + x_2(0)) e^{-t} & \text{si } t \in [0, t_1] \\ (x_1(t_1) + \frac{1}{2}x_2(t_1)) e^{-(t-t_1)} & \text{si } t \in ]t_1, \infty[ \end{cases}$$

Donc si  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ,  $y$  est nul sur  $[0, t_1]$  et on est content. Seulement, on a alors

$$x_1(t_1) = 40(1 - e^{-t_1}) \text{ et } x_2(t_1) = 40(e^{-t_1} - 1)$$

donc  $y(t_1^+) = 20(1 - e^{-t_1})$ . Autrement dit,  $y$  subit une discontinuité qui nécessite un certain temps de stabilisation (figure 3.1).

Si de plus la perturbation fait osciller le système entre les deux modes avec une période trop courte pour qu'il ait le temps de stabiliser, alors  $y$  peut ne jamais être proche de 0, donc de l'objectif (figure 3.2).

Ce que montre cet exemple, c'est que malgré le fait que dans chaque état, le contrôleur rejette parfaitement la perturbation, si celle-ci implique des changements d'état, il se peut que le comportement de l'ensemble ne soit pas satisfaisant.

La conséquence de cette constatation est qu'on se doit de contraindre les perturbations que l'on considère, car il semble a priori difficile de réaliser un contrôleur capable de rejeter un signal quelconque de perturbations dans le cas hybride. La section suivante décrit la classe des signaux de perturbation choisie, ce choix étant motivé encore une fois par les spécifications du problème initial de EDF.

### 3.2.1 Spécification des perturbations

Les signaux de perturbations sont choisis affines par morceaux avec quatre contraintes :

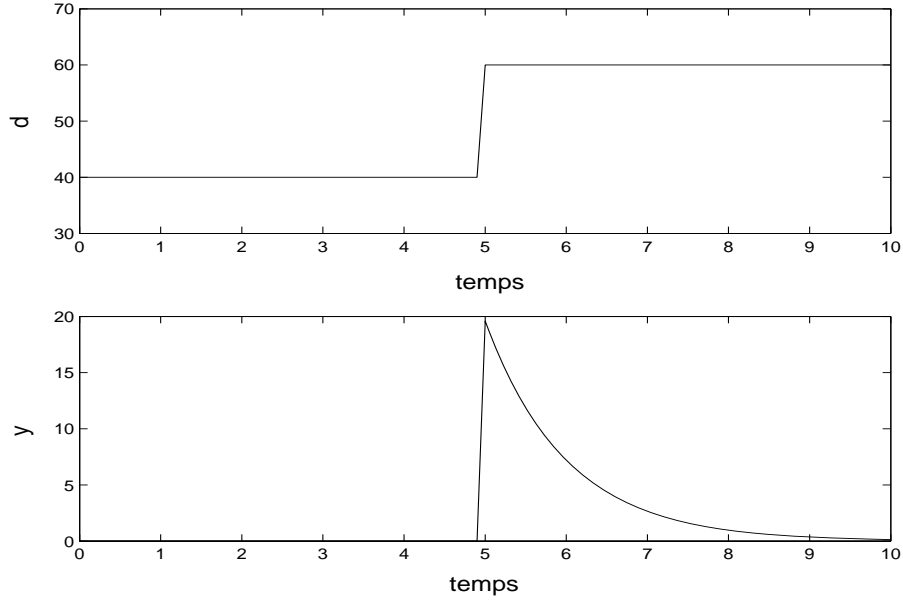


FIG. 3.1 – Si la perturbation fait transiter le système d’un mode à l’autre, la sortie subit une discontinuité.

1.  $d(t)$  est toujours compris entre une valeur maximale et une valeur minimale;
2. Les durées entre deux discontinuités sont bornées par une constante de temps  $\tau_d$  ;
3. Les discontinuités des pentes des fonctions affines sont bornées en valeur absolue par un réel  $\alpha$  ;
4. La hauteur des sauts à chaque discontinuité est bornée en valeur absolue par un réel  $\beta$ .

La première contrainte se traduit simplement par le fait que  $\mathcal{D}$  est le compact  $[d_{min}, d_{max}]$ . Notons  $\mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta}$  l’ensemble des signaux vérifiant ces contraintes. Formellement, soit  $d$  un tel signal,  $d$  vérifie donc :

–  $d : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{D}$

– Il existe trois suites  $(t_i) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ ,  $(a_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $(b_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,

- $t_{i+1} - t_i \geq \tau_d$
- $\forall t \in [t_i, t_{i+1}[, d(t) = a_i t + b_i$
- $|a_{i+1} - a_i| \leq \alpha$
- $|d(t_i^+) - d(t_i^-)| \leq \beta$

Quelques remarques sur ces ensembles :

$\mathcal{D}_{\tau_d, 0, 0}$  est l’ensemble des signaux constants compris entre  $d_{min}$  et  $d_{max}$ , ce qui n’est pas complètement inintéressant, mais quand même plus que  $\mathcal{D}_{\tau_d, 0, \beta}$  qui est l’ensemble des signaux constants par morceaux de tailles au moins égales à

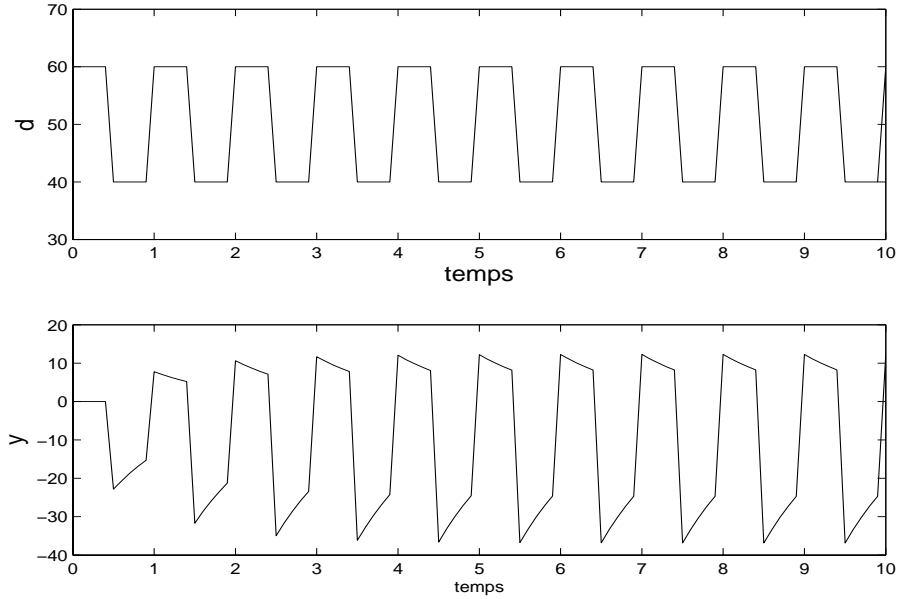


FIG. 3.2 – Dans ce cas, le système n'a pas le temps de stabiliser entre deux changements de mode et la solution  $y$  est toujours éloignée de 0

$\tau_d$  et dont les sauts sont bornés par  $\beta$ , et que je prendrai la peine de noter plus simplement  $\mathcal{D}_{\tau_d, \beta}$ . Moyennant quoi on peut encore remarquer que

$$\mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta} \subset \{d : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D} \text{ tel que } \dot{d} \in \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha}\}$$

ou plus précisément

$$\bigcup_{\beta \in \mathbb{R}^+} \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta} = \{d : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D} \text{ tel que } \dot{d} \in \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha}\}$$

Puisqu'on dispose d'un modèle de perturbations paramétré, pour exprimer formellement le problème de vérification d'un contrôleur, il reste à définir un type de spécifications qui sera basé sur les spécifications **S1** et **S2** (**S3** est une contrainte qui est facilement vérifiable et qui peut donc rester implicite) de la partie précédente. Ces deux spécifications contiennent trois paramètres remarquables :

**L'erreur maximale**  $\epsilon_M$  maximale admissible entre la variable contrôlée  $y$  et l'objectif. Elle ne doit donc jamais être dépassée ( $\epsilon_M = 5$  pour **S1**)

**La tolérance**  $\epsilon_m$  sur l'erreur, c'est-à-dire la marge autour de l'objectif dans laquelle doit évoluer la variable contrôlée ( $\epsilon = .5$  pour **S2**).

**Le temps de stabilisation**  $\tau_s$ , ou le temps maximal pendant lequel la variable contrôlée peut rester en dehors de la marge d'erreur tolérée ( $\tau_s = 100$  secondes pour **S3**).

Donc on peut noter  $\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s)$  la spécification faisant intervenir ces trois paramètres et dans ce cas,  $\mathbf{Sp}(5, .5, 100)$  regroupe **S1** et **S2** et  $\mathbf{Sp}(10, .5, 150)$  regroupe **SR1** et **SR2**.

On donne alors la définition suivante :

**Définition 2** Le système  $\mathcal{S}$ , muni d'un ensemble de conditions initiales  $I_0$ , d'une loi de contrôle  $u : \mathcal{X} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$  et d'un signal de référence  $\mathbf{r} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{Y}$  satisfait les spécifications  $\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s)$  pour l'ensemble des perturbations  $\mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta}$ , noté

$$(\mathcal{S}, I_0, \mathbf{r}, u) \models (\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s), \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta})$$

si pour tout signal de perturbation  $d \in \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta}$  et pour toute condition initiale  $\mathbf{x} \in I_0$ , la solution  $\mathbf{y}$  du système  $(\mathcal{S}, u, d)$  correspondante vérifie :

1.  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{r}(t)\| < \epsilon_M$
2.  $\|\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{r}(t_1)\| > \epsilon_m \Rightarrow \exists t_s \leq t_1 + \tau_s$  tel que  $\forall t > t_s$  où  $d$  est continue,  $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{r}(t)\| \leq \epsilon_m$

La deuxième condition signifie qu'après un certain instant  $t_s$ , éloigné de moins de  $\tau_s$  secondes de l'instant où  $y$  sort de la marge d'erreur tolérée, la solution est stabilisée, ce qui veut dire que si aucun nouveau changement ne se produit après  $t_1$  alors  $y$  ne sortira plus jamais de cette marge d'erreur après  $t_s$ .

Le problème de vérification d'un contrôleur pour des spécifications donnée revient donc à montrer que toute perturbation prise dans une classe définie induit un comportement du système contrôlé qui respecte les conditions **1** et **2**, ce qu'on peut formuler ainsi :

**Problème 1** (Vérification de contrôleur) Soit  $\mathcal{S}$  un SHLM,  $u$  une loi de contrôle,  $I_0$  un ensemble de conditions initiales et  $\mathbf{r}$  un signal de référence. Soient  $\tau_d, \alpha, \beta, \epsilon_M, \epsilon_m$  et  $\tau_s$  des constantes positives, a-t-on

$$(\mathcal{S}, I_0, \mathbf{r}, u) \models (\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s), \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta})?$$

Ce problème est intéressant car c'est le problème de base qui permet de caractériser de manière garantie et quantitative la qualité d'un contrôleur. Si on peut le résoudre, c'est-à-dire si l'on dispose d'un oracle qui, étant donné un contrôleur et une spécification dit si oui ou non ce contrôleur satisfait cette spécification, alors on est potentiellement capable de résoudre des problèmes a priori beaucoup plus complexes : déterminer un contrôleur admissible (en faisant varier le contrôleur jusqu'à obtenir une réponse positive de l'oracle), déterminer les limites exactes d'un contrôleur (en relachant ou durcifiant les spécifications pour trouver la frontière entre oui et non)...

Reprenons l'exemple simple  $\mathcal{S}_1$  de la section 3.2 composé des systèmes 3.1 et 3.2 ( $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ ). La figure 3.3 montre que pour ce système on n'a ni :

$$(\mathcal{S}, I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{r} = 0, u) \models (\mathbf{Sp}(20, 2, 2), \mathcal{D}_{2,0,20})$$

car la contrainte du temps de stabilisation est violée, ni

$$(\mathcal{S}, I_0, 0, u) \models (\mathbf{Sp}(10, 3, 2), \mathcal{D}_{2,0,20})$$

car la contrainte de l'erreur maximale est violée.

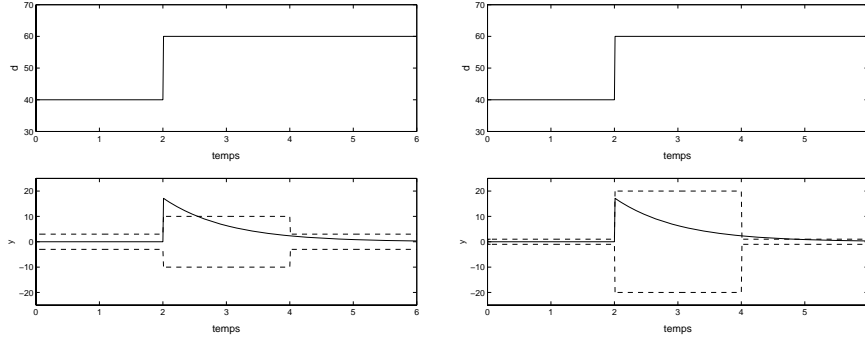


FIG. 3.3 – A gauche, le système viole la spécification de l’erreur maximale et à droite il viole la contrainte liée au temps de stabilisation.

Mais a-t-on

$$(\mathcal{S}, I_0, 0, u) \models (\mathbf{Sp}(20, 3, 2), \mathcal{D}_{2,0,20})?$$

Remarquons déjà que si  $y(t_0) = y_0$ , alors  $\forall t > t_0, y(t) = y_0 e^{(t-t_0)}$ . Donc si  $y(t_0) = 20 = \epsilon_M$ , alors  $y(t_0 + \tau_s) = 20e^{-2} \simeq 2.7 < \epsilon_m = 3$ . Autrement dit, si  $y$  atteint la valeur d’erreur maximale à un moment donnée, il sera dans la marge tolérée.

Malheureusement, on a vu que si il se produit un changement de mode à l’instant  $t_1$ , on a une discontinuité  $y(t_1^+) - y(t_1^-) = \frac{1}{2}x_2(t_1)$ . Or au pire,  $x_2(t)$  est proche de  $-200$  (car il est nul à  $t = 0$  et il tend vers  $-2d$  et  $d$  est borné par  $100$ ). Comme les sauts de  $d$  sont borné par  $20$ , le cas le pire est celui d’un saut de  $90$  à  $70$ , puis de  $70$  à  $50$  impliquant un changement de mode et donc une discontinuité de  $y$  de l’ordre de  $-70$ . De cette manière, on n’est sûr qu’on n’a pas

$$(\mathcal{S}, I_0, 0, u) \models (\mathbf{Sp}(20, 3, 2), \mathcal{D}_{2,0,20})$$

et qu’on ne peut guère prouver mieux que

$$(\mathcal{S}, I_0, 0, u) \models (\mathbf{Sp}(75, 3, 2), \mathcal{D}_{2,0,20})$$

Cet exemple montre encore que malgré sa simplicité, il n’est pas forcément évident de résoudre pour son cas le problème 1.

### 3.3 Cas du SHLM approchant la dynamique du GV

#### 3.3.1 Modèle utilisé

On a vu que le SHLM comprenant deux modes, l’un avec la dynamique  $S_{10} = (A_{10}, B_{10}, C_{10})$  et l’autre avec  $S_{80} = (A_{80}, B_{80}, C_{80})$ , était un modèle approchant la dynamique du GV. Ce modèle étant relativement simple, j’ai construit des dynamiques intermédiaires à partir des deux données pour le compléter. En l’absence de précisions supplémentaires sur la dynamique réelle du GV, ces dynamiques ont été obtenues en gardant la structure des matrices  $A, B$  et  $C$  et en réalisant une interpolation linéaire par rapport à  $d$  des coefficients de ces

matrices. La figure 3.4 donne ainsi la dynamique utilisée en fonction de la valeur de la perturbation  $d$  pour un système comprenant 5 modes (système que nous appellerons  $\mathcal{S}_{GV}^5$  et plus généralement  $\mathcal{S}_{GV}^n$  pour un système à  $n$  mode,  $n \geq 1$ ).

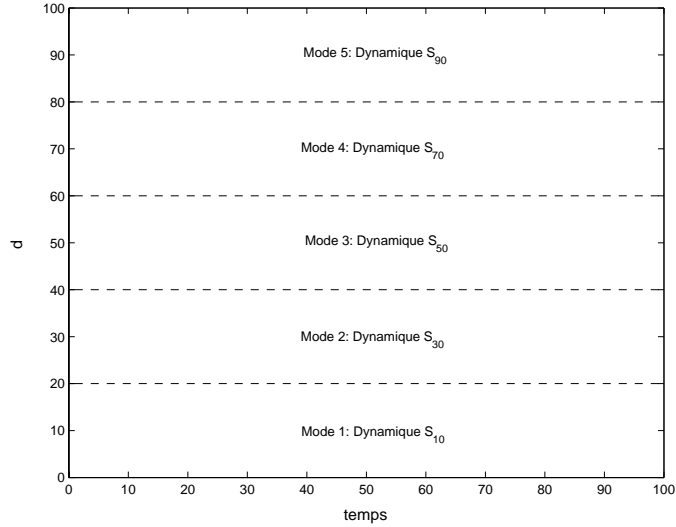


FIG. 3.4 – Dynamique utilisée en fonction de  $d$

Pour effectuer des simulations, un modèle Simulink de ce système à 5 modes a été utilisé. La figure 3.5 montre la racine de ce modèle, donc sa structure globale, composée du système hybride en lui-même qui prend en entrée le signal de perturbation généré par le bloc 'signal builder' et le signal de contrôle calculé par le contrôleur détaillé dans la section suivante.

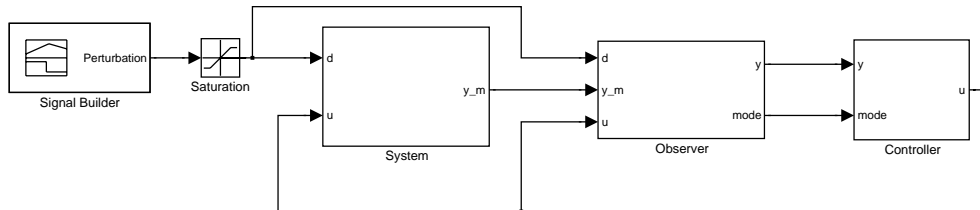


FIG. 3.5 – Structure globale du modèle Simulink utilisé

La structure du modèle du système hybride est détaillée dans la figure 3.6. La fonction MATLAB donne le mode en fonction de  $d$  (elle implémente en fait la fonction d'indice  $\sigma$ ), le bloc 'dynamics selection' contient toutes les dynamiques du système (c'est à dire les matrices  $A_{10}, B_{10}, etc$ ) et donne en sortie celle correspondant au mode courant. Le bloc 'HM State Space' effectue la simulation

du système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

et donne donc  $\mathbf{y}$  en sortie. Enfin pour simuler la présence de deux senseurs pour la mesure de  $N_{ge}$ ,  $y_1$  est dédoublée et l'ensemble donne en sortie le vecteur  $y_m = (N_{ge1}, N_{ge2}, N_{gl}, Q_v, Q_e)$  additionnée d'un vecteur d'erreur éventuellement non nul (cf partie suivante).

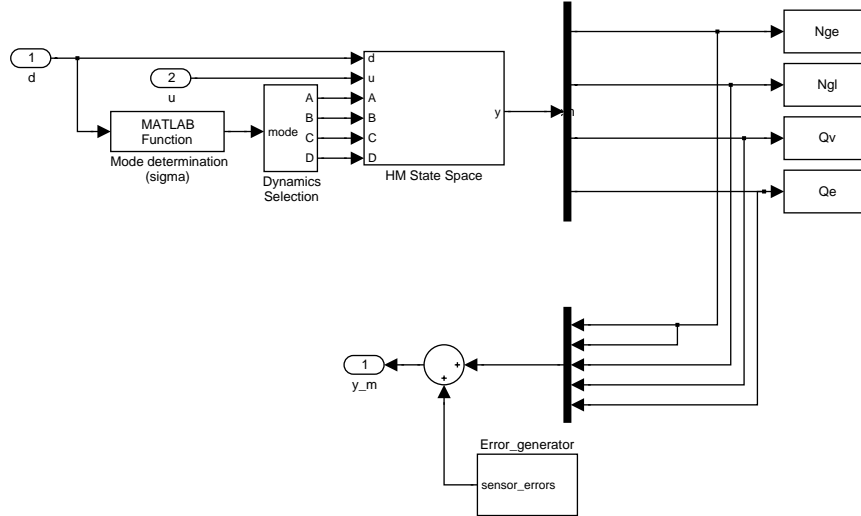


FIG. 3.6 – Structure détaillée du système hybride

### 3.3.2 Contrôleur

On a vu que dans le cas de l'exemple  $S_1$ , il était simple de trouver un contrôleur 'parfait' pour chaque mode. Pour étudier les caractéristiques du contrôleur hybride correspondant, il suffisait alors de considérer les cas où le système effectue une transition d'un mode à l'autre. Ce n'est évidemment pas le cas pour des systèmes plus complexes pour lesquels il faut commencer par considérer le comportement du système contrôlé à l'intérieur de chaque mode.

Dans cette section, je décris le type de contrôleur paramétré utilisé dans chaque mode de fonctionnement de  $S_{GV}^5$ . Dans ce travail, mon objectif n'a pas été de trouver la meilleure manière de réaliser un contrôleur pour le type de systèmes linéaires considéré, mais plutôt d'en trouver un de manière plus ou moins empirique, réalisant l'objectif de manière satisfaisante et d'une structure suffisamment simple pour être étudié. En particulier, je n'utilise pas de boucle fermée de type placement des pôles ce qui nécessiterait la reconstruction de l'état par un observateur (cf chapitre suivant).

La figure 3.7 donne d'un côté la réponse du système à un échelon de la perturbation  $d$ ,  $u$  étant nul, et de l'autre la réponse à un échelon du contrôle  $u$ ,  $d$  restant nul. Dans les deux cas, la sortie  $y$  tend vers une droite, de pente négative dans le premier cas, et positive dans le deuxième.

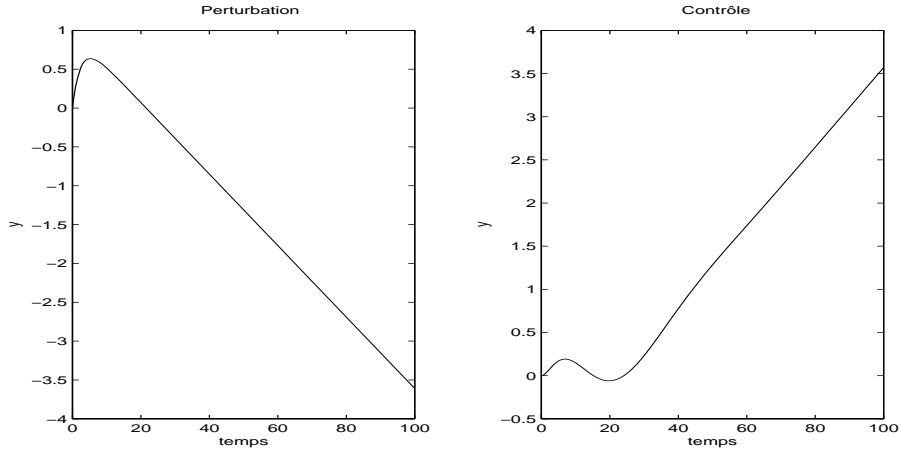


FIG. 3.7 – Réponse du système à un échelon de  $d$  à gauche et de  $u$  à droite.

On peut calculer le coefficient directeur de ces deux droites, c'est le même au signe près :  $\pm \frac{1}{\tau_n}$ . Donc si on choisit déjà  $u(t) = d(t)$ , alors le système finira par converger vers une valeur constante mais différente de zéro (car le système ne réagit pas à la même vitesse sous l'impulsion de  $u$  et de  $d$ ). Pour achever de stabiliser  $y$  vers 0, on utilise une boucle fermée standard du type PI (pour Proportionnel Intégral), c'est-à-dire qu'on ajoute au contrôleur  $k_P$  fois la sortie  $y$  et  $k_I$  fois l'intégrale de la sortie. La loi de contrôle vaut donc finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u(t) = d(t) + k_P y(t) + k_I \int_0^t y(t) \quad (3.5)$$

Nous allons montrer, ou plutôt vérifier par le calcul que pour des coefficients  $k_I$  et  $k_P$  donnés, ce contrôleur stabilise le système sous n'importe quel type de perturbation affine. Dans ces conditions, ce contrôleur simple est susceptible de remplir l'objectif qu'on s'est fixé, c'est-à-dire rejeter des perturbations choisies dans la classe  $\mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta}$ . Ses avantages sont justement sa simplicité qui le rend facile à implémenter et sa paramétrisation avec seulement deux paramètres. La figure 3.8 donne la structure du bloc Simulink implémentant le contrôleur.

### 3.4 Vérification du contrôleur de $\mathcal{S}_{GV}^n$

Dans cette section, nous allons dégager une méthode pour résoudre le problème :

$$n \geq 1, (\mathcal{S}_{GV}^n, I_0, \mathbf{r} = 0, u) \models (\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s), \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta})? \quad (3.6)$$



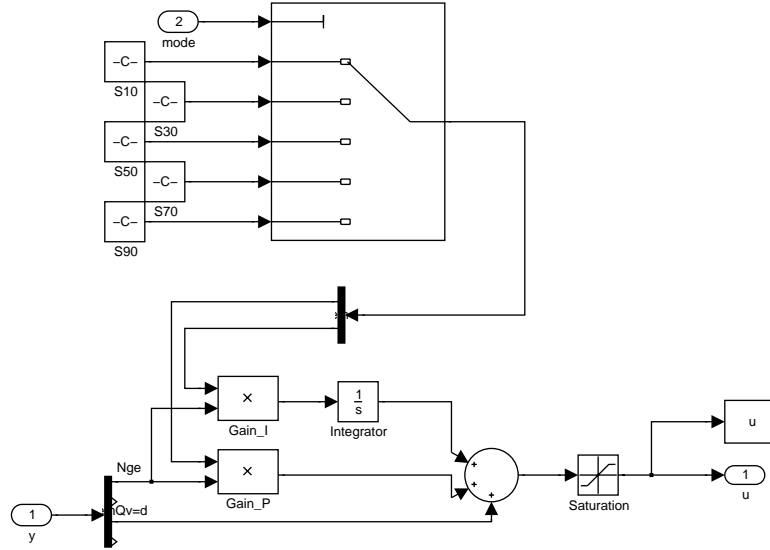


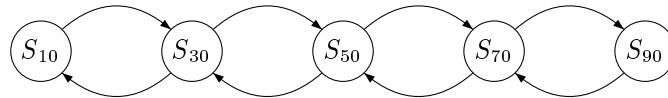
FIG. 3.8 – Structure détaillée du contrôleur

### 3.4.1 Graphe des transitions

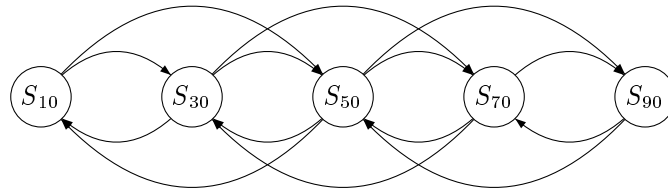
La première étape consiste à réaliser le graphe de transitions du système. En effet, la hauteur des sauts des signaux de perturbation étant bornée, toutes les transitions entre tous les modes ne sont pas possibles. Chaque mode est actif pour  $d$  compris entre un  $d_{min}$  et un  $d_{max}$  (revoir figure 3.4) et donc une transition du mode  $i$  vers le mode  $j$  est possible si et seulement si

$$d_{min_j} - d_{max_i} < \beta$$

De cette manière, le graphe des transitions de  $S_{GV}^5$  pour  $\beta = 5$  est de la forme :



C'est évidemment le cas le plus simple. Pour  $\beta = 30$ , c'est déjà plus compliqué :



On notera le graphe de transitions d'un SHLM  $\mathcal{S}$ , d'une manière classique,  $(\mathcal{S}, \rightarrow)$  où  $\rightarrow$  est une relation binaire sur les modes :

$$\rightarrow = \left\{ (i, j) \in \sigma(\mathcal{D})^2 / \text{une transition du mode } i \text{ vers le mode } j \text{ est possible} \right\}$$

Une fois qu'on a obtenu le graphe des transitions, il reste basiquement deux cas à vérifier : le cas d'un saut de perturbation à l'intérieur d'un mode (cas 1) et le cas d'un saut de perturbation d'un mode  $i$  vers un mode  $j$  (cas 2) pour lesquels une transition est possible comme représenté sur la figure 3.9.

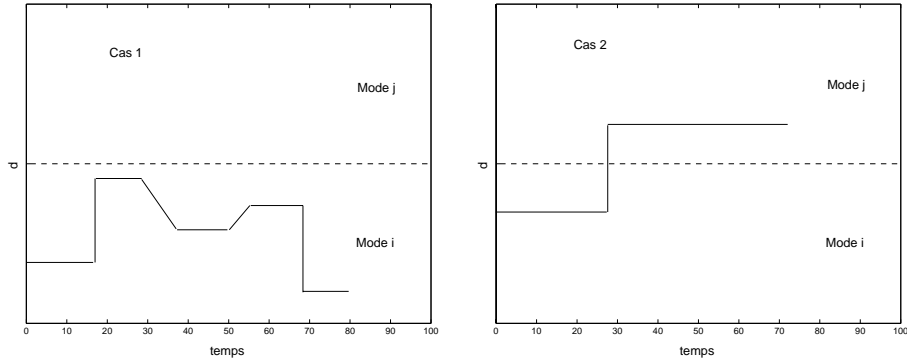


FIG. 3.9 –

Pour le deuxième cas, plus complexe, on se limitera d'abord à des perturbations constantes par morceaux, comme le suggère la figure 3.9.

### 3.4.2 Vérification du cas 1

Le cas 1 se ramène en fait à la résolution du problème 3.6 dans le cas où  $n = 1$ , c'est-à-dire où il n'y a qu'un seul mode.

L'outil utilisé dans la suite est la transformée de Laplace.

#### Transformée de Laplace du système

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B_1d(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Si on calcule la transformée de Laplace de ce système, on obtient :

$$\begin{cases} s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(0) &= A\hat{\mathbf{x}} + B_1\hat{d} + B_2\hat{u} \\ \hat{y} &= C\hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

En remplaçant  $\hat{\mathbf{x}}$  dans l'expression de  $\hat{y}$ , cela donne :

$$\hat{y} = C(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + C(sI - A)^{-1}B_1\hat{d} + C(sI - A)^{-1}B_2\hat{u} \quad (3.7)$$

Notons  $H_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_1$  et  $H_u(s) = C(sI - A)^{-1}B_2$ .

D'après la définition du contrôleur 3.5, on a

$$\hat{u} = \hat{d} + k_P.\hat{y} + \frac{k_I}{s}.\hat{y}$$

En remplaçant l'expression dans 3.7 et en résolvant, on obtient

$$\hat{y} = \frac{C(sI - A)^{-1}}{1 - k_P H_u(s) - k_I H_u(s)} \mathbf{x}(0) + \frac{H_u(s) + H_d(s)}{1 - k_P H_u(s) - k_I H_u(s)} \hat{d}$$

Donc si on note enfin

$$\mathbf{H}_0(s) = \frac{C(sI - A)^{-1}}{1 - k_P H_u(s) - k_I H_u(s)} \quad (3.8)$$

et

$$H_f(s) = \frac{H_u(s) + H_d(s)}{1 - k_P H_u(s) - k_I H_u(s)} \quad (3.9)$$

on a

$$\boxed{\hat{y} = \mathbf{H}_0(s)\mathbf{x}(0) + H_f(s)\hat{d}} \quad (3.10)$$

$\mathbf{H}_0(s)$  est notée en gras pour rappeler que c'est un vecteur de fonctions de transfert de la même dimension que  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{H}_0(s) = \begin{pmatrix} \frac{B_1(s)}{A_1(s)} & \frac{B_2(s)}{A_2(s)} & \frac{B_3(s)}{A_3(s)} & \frac{B_4(s)}{A_4(s)} & \frac{B_5(s)}{A_5(s)} \end{pmatrix}$$

à la différence de  $H_f$  qui est une fonction de transfert unidimensionnelle :

$$H_f(s) = \frac{B_f(s)}{A_f(s)}$$

(tous les  $A_*$  et les  $B_*$  sont des polynômes vérifiant  $d^\circ B_* \leq d^\circ A_*$ )

### Interprétation de la transformée de Laplace

Si  $d(t) = at + b$ , alors  $\hat{d}(s) = \frac{a+bs}{s^2}$  et l'expression 3.10 devient

$$\hat{y} = \mathbf{H}_0(s) \cdot \mathbf{x}(0) + H_f(s) \frac{a + bs}{s^2}$$

La transformée de Laplace inverse  $y = \mathcal{L}^{-1}(\hat{y})$  de cette expression donne alors la solution du système sur l'intervalle  $[0, t_0]$  où  $t_0$  est le premier instant où  $d$  est discontinue ou le premier instant où le système change de mode. Pour vérifier que le contrôleur est valide, la première condition nécessaire est que  $y(t)$  tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. Vérifier cette condition revient à calculer les pôles de  $\hat{y}$ , c'est-à-dire les racines des polynômes  $A_*$ . Si l'un de ces pôles possède une partie réelle positive, alors le système contrôlé est instable et on peut affirmer que le contrôleur n'est pas valide. Remarquons que le calcul montre que la fonction de transfert  $H_f$  possède deux zéros nuls (ce n'est pas un pléonisme, cela veut dire que 0 est racine double de  $B_f$ ...) donc les pôles instables nuls introduits par  $\hat{d} = \frac{a+bs}{s^2}$  sont annulés par ces deux zéros. C'est ce qui permet à ce contrôleur PI de stabiliser le système pour des perturbations affines.

Maintenant, si le système est stable, comment calculer la suite de la solution au delà de  $t_0$  ?

Supposons qu'à l'instant  $t_0 \geq \tau_d$ , on ait eu affaire à une discontinuité de la perturbation de la forme suivante :

$$d(t) = \begin{cases} at + b & \text{si } t \in [0, t_0] \\ a't + b' & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

Notons  $\Delta d : t \mapsto (a' - a)t + b' - b$  et supposons que la solution du système sur l'intervalle  $[0, t_0]$  soit bornée par une exponentielle décroissante telle que

**Hypothèse 1**

$$\forall t \in [0, t_0], |y(t)| \leq \epsilon_M e^{-\lambda t} \text{ où } \lambda = \frac{1}{\tau_d} \ln \frac{\epsilon_m}{\epsilon_M}$$

Cela signifie notamment que le système est stabilisé, c'est-à-dire que  $y$  est entré dans la zone d'erreur tolérée (pour ne plus en sortir), avant  $t_0 : |y(t_0)| \leq \epsilon_m$  (cf figure 3.10).

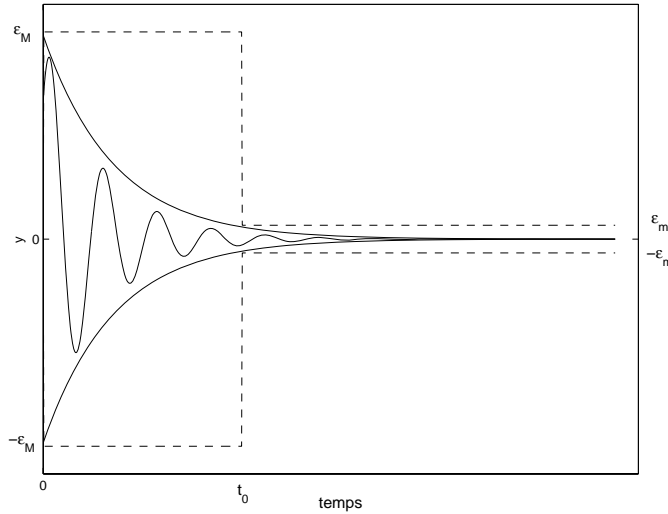


FIG. 3.10 – Exemple de profil de la solution du système vérifiant l'hypothèse 1, en supposant qu'il ne se passe rien à  $t_0$

La solution du système pour  $t > t_0$  est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0(s) \cdot \mathbf{x}(t_0) + H_f(s) \frac{a' + b's}{s} \right) (t - t_0) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0(s) \cdot \mathbf{x}(t_0) + H_f(s) \frac{a + bs}{s^2} \right) (t - t_0) + \mathcal{L}^{-1} \left( H_f(s) \Delta \hat{d} \right) (t - t_0) \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse 1 ci-dessus,

$$\left| \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0(s) \cdot \mathbf{x}(t_0) + H_f(s) \frac{a + bs}{s^2} \right) (t) \right| \leq \epsilon_m e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

et donc

$$|y(t)| \leq \epsilon_m e^{-\lambda t} + |\mathcal{L}^{-1} \left( H_f(s) \Delta \hat{d}(s) \right) (t)| \quad (3.11)$$

L'intérêt de cette inégalité est qu'on peut calculer la fonction

$$t \mapsto \mathcal{L}^{-1} \left( H_f(s) \Delta \hat{d}(s) \right) (t)$$

avec une précision arbitraire (avec une décomposition en éléments simples de  $\frac{B_f(s) \cdot \Delta d}{A_f(s) \cdot s}$  qui est une méthode classique de calcul de la transformée de Laplace inverse), et donc à partir de ce calcul vérifier que le membre de droite vérifie l'hypothèse 1 et en particulier vérifie les spécifications d'erreur maximale et de temps de stabilisation. De plus, il suffit de vérifier cette hypothèse pour le changement de perturbation le plus important possible c'est-à-dire  $\Delta d(t) = \alpha t + \beta$ .

D'autre part, remarquons que si le système est stable,  $y$  va tendre vers 0 et de la même manière,  $\mathbf{x}$  va tendre vers un point d'équilibre dépendant de  $d$  noté  $\mathbf{x}_{eq}(d)$ . Ainsi, si on a  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{eq}(d(0))$ , autrement dit si  $\mathbf{x}$  est déjà sur son point d'équilibre à  $t = 0$  alors logiquement  $\mathbf{y}$  est nul sur tout  $[0, t_0]$ , ce qu'on peut exprimer par le lemme suivant :

**Lemme 1** *Si les fonction de transfert  $\mathbf{H}_0$  et  $\frac{H_f(s)}{s^2}$  sont stables, alors  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists \mathbf{x}_{eq}(b)$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}^+,$*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0(s) \cdot \mathbf{x}_{eq}(b) + H_f(s) \frac{a + bs}{s^2} \right) (t) = 0$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Résultat 1** *Soit  $\mathcal{S}_{GV}^1$  un SHLM défini par un unique mode avec une dynamique de la forme  $(A, B, \mathbf{c})$  telle que donnée en 2.3 et 2.5, soient  $\tau_d, \alpha, \beta, \epsilon_M, \epsilon_m$  et  $\tau_s$  des constantes positive. Soient  $k_I$  et  $k_P$  des réels définissant une loi de contrôle  $u$  comme en 3.5, et soient enfin les fonctions de transfert  $\mathbf{H}_0$  et  $H_f$  définies en 3.8 et 3.9. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1  $\mathbf{H}_0$  et  $H_f$  sont stables et

2  $\forall t > 0, \mathcal{L}^{-1} \left( H_f \frac{\alpha + \beta s}{s^2} \right) (t) \leq \epsilon_m e^{-\lambda t}$  où  $\lambda = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\epsilon_m}{\epsilon_M}$  et  $\tau = \min(\tau_d, \tau_s)$

Alors

$$(\mathcal{S}_{GV}^1, I_0 = \{\mathbf{x}_{eq}(\cdot)\}_f, \mathbf{r} = 0, u) \models (\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s), \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta})$$

L'idée est la suivante : on suppose que le système est initialisé sur un point d'équilibre (on verra qu'on peut calculer ces points d'équilibre en fonction de  $d$ ) donc sa solution est initialement nulle et le reste jusqu'au premier changement dans la perturbation à  $t_0$ . A ce moment là,  $y$  vérifie donc trivialement l'hypothèse 1. Les conditions 1. et 2. du résultat 1 impliquent qu'alors l'hypothèse 1 sera encore vérifiée au-delà de  $t_0$  et jusqu'au prochain changement et donc par induction pour tout  $t$ , quel que soit le signal de perturbation  $d \in \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta}$ . Ainsi

la solution du système vérifie :

$$|y(t)| = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_0 \\ \left| \mathcal{L}^{-1} \left( H_f(s) \frac{a_1 - a_0 + (b_1 - b_0)s}{s^2} \right) (t - t_0) \right| \leq \epsilon_M e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ = \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0(s) \cdot \mathbf{x}(t_1) + H_f(s) \frac{a_2 + b_2 s}{s} \right) (t - t_1) & \\ < \epsilon_m e^{-\lambda(t-t_1)} + \left| \mathcal{L}^{-1} \left( H_f(s) \frac{a_2 - a_1 + (b_2 - b_1)s}{s^2} \right) (t - t_1) \right| & \\ \leq \epsilon_M e^{-\lambda(t-t_1)} & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

### 3.4.3 Vérification du cas 2

Comme indiqué en début de section, on se limite pour l'étude du cas 2 à des perturbations constantes par morceaux, donc au cas où  $\alpha = 0$ .

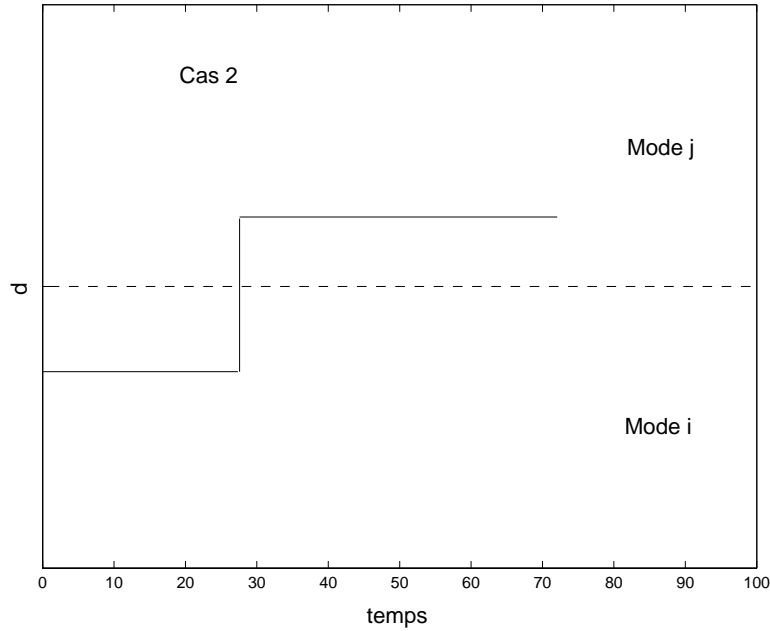


FIG. 3.11 –

On suppose donc que sur l'intervalle  $[0, t_0]$  le système évolue dans le mode  $i$ ,  $d$  étant constant égal à  $d_0$  et sur l'intervalle  $]t_0, +\infty[$ , le système évolue dans le mode  $j$ ,  $d$  étant constant égal à  $d_1$ . On peut alors comme dans la section précédente exprimer la solution du système en fonctions de transformées de Laplace inverses :

$$y(t) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^i(s) \mathbf{x}(0) + H_f^i(s) \frac{d_0}{s} \right) (t) & \text{si } t \in [0, t_0] \\ \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s) \mathbf{x}(t_0) + H_f^j(s) \frac{d_1}{s} \right) (t - t_0) & \text{si } t \in ]t_0, +\infty[ \end{cases}$$

Posons, suivant le Lemme 1,  $\mathbf{x}_{eq}^i(d_0)$  le point d'équilibre du système dans le mode  $i$  lorsque la perturbation vaut  $d_0$ , et  $\mathbf{x}_{eq}^j(d_0)$  le point d'équilibre du système dans le mode  $j$  lorsque la perturbation vaut  $d_0$ . Le fait que le système ne puisse être dans le mode  $j$  lorsque  $d$  vaut  $d_0$  n'empêche évidemment pas l'existence de ce deuxième point d'équilibre (bien qu'un peu virtuel, quand même). On a donc en particulier :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s) \cdot \mathbf{x}_{eq}^j(d_0) + H_f^j(s) \frac{d_0}{s} \right) (t) = 0$$

Puisque cette quantité est nulle, on peut la retirer dans l'expression de  $y(t)$  ci-dessus pour  $t > t_0$  :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s) \mathbf{x}(t_0) + H_f^j(s) \frac{d_1}{s} \right) (t-t_0) - \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s) \cdot \mathbf{x}_{eq}^j(d_0) + H_f^j(s) \frac{d_0}{s} \right) (t-t_0)$$

En ajoutant encore  $\mathbf{H}_0^j(s)(\mathbf{x}_{eq}^i(d_0) - \mathbf{x}_{eq}^j(d_0))$  et en réarrangeant les termes,  $y$  devient la somme de trois termes principaux :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s) (\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{eq}^i(d_0)) \right) (t-t_0) \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left( H_f^j(s) \frac{d_1 - d_0}{s} \right) (t-t_0) \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s) (\mathbf{x}_{eq}^i(d_0) - \mathbf{x}_{eq}^j(d_0)) \right) (t-t_0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Premier terme**  $\mathbf{H}_0^j(s)(\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{eq}^i(d_0))$

Ce terme est difficile à quantifier car il n'y a pas de liens direct a priori entre  $\mathbf{x}_{eq}^i(d_0)$  et  $H_0^j(s)$ . Par contre, pendant tout l'intervalle  $[0, t_0]$ ,  $\mathbf{x}(t)$  a pour limite  $\mathbf{x}_{eq}^i(d_0)$ , il est donc raisonnable d'émettre l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2**  $|y(t_0)| < \epsilon_m \Rightarrow \mathbf{H}_0^j(s)(\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{eq}^i(d_0))$  est négligeable.

Remarquons que cette hypothèse sera d'autant plus vérifiée que  $\epsilon_m$  sera petit par rapport à  $\epsilon_M$ .

**Deuxième terme**  $H_f^j(s) \frac{d_1 - d_0}{s}$

Ce terme représente l'erreur introduite par le saut de la perturbation en lui-même. Si le saut s'était déroulé uniquement dans le mode  $j$ , c'est le terme principal que nous aurions eu à traiter. Autrement dit, on peut le borner de la même manière que pour le cas 1 en calculant la transformée de Laplace inverse pour le saut de perturbation maximum c'est-à-dire en calculant :

$$t \mapsto \mathcal{L}^{-1} \left( H_f^j(s) \frac{\beta}{s} \right) (t)$$

### Troisième terme $\mathbf{H}_0^j(s)(\mathbf{x}_{eq}^i(d_0) - \mathbf{x}_{eq}^j(d_0))$

Ce terme représente l'erreur introduite par le changement de mode. En effet, le changement de dynamique implique le changement des points d'équilibre du système et donc le contrôleur doit compenser ce fait en plus de la perturbation. L'utilisation de la transformée de Laplace permet de découpler ces deux phénomènes en 'faisant comme si' le contrôleur commençait par compenser le changement de points d'équilibre du mode  $i$  vers le mode  $j$ , puis compensait 'ensuite' le saut de la perturbation.

Comment caractériser l'effet de ce changement de point d'équilibre ?

D'abord, il se trouve que l'on peut calculer  $\mathbf{x}_{eq}^i(d_0)$  en fonction des coefficients des matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $\mathbf{c}_i$  (calcul non détaillé) :

$$\mathbf{x}_{eq}^i(d_0) = \begin{pmatrix} d_0 \\ -d_0 \frac{\beta_0^i}{\alpha_0^i} \\ 0 \\ \frac{d_0}{\alpha_0^i} \\ \beta_g^i d_0 \end{pmatrix} = d_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\beta_0^i}{\alpha_0^i} \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha_0^i} \\ \beta_g^i \end{pmatrix} = d_0 \mathbf{x}_{eq}^i(1)$$

$\mathbf{x}_{eq}^i(d_0)$  est donc proportionnel à  $d_0$ , et par suite, le troisième terme de 3.12 l'est aussi :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s)(\mathbf{x}_{eq}^i(d_0) - \mathbf{x}_{eq}^j(d_0)) \right) (t) = d_0 \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{H}_0^j(s)(\mathbf{x}_{eq}^i(1) - \mathbf{x}_{eq}^j(1)) \right) (t)$$

Pour borner ce terme il suffit donc de calculer cette fonction (toujours par décomposition en éléments simples des termes de  $H_0^j(s)$ ) pour le cas où  $d_0$  est maximal ce qui n'est pas difficile à déterminer : si  $d_{ij}$  est la limite entre le mode  $i$  et le mode  $j$  (la dernière limite si  $i$  et  $j$  ne sont pas contigus) alors

$$d_0^{max} = \begin{cases} d_{ij} - \beta & \text{si } d_{ij} = d_{min_j} \text{ (} j \text{ est au dessus de } i \text{)} \\ d_{ij} + \beta & \text{si } d_{ij} = d_{max_j} \text{ (} j \text{ est au dessous de } i \text{)} \end{cases} \quad (3.13)$$

Au final, pour vérifier le cas 2 d'une manière générale, sous l'hypothèse 2 il suffit de considérer la fonction :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( H_f^j(s) \frac{\beta}{s} + d_0^{max} \mathbf{H}_0^j(s) (\mathbf{x}_{eq}^i(1) - \mathbf{x}_{eq}^j(1)) \right) (t) \quad (3.14)$$

### 3.4.4 Algorithme

A partir de ce dernier résultat et du résultat 1 de la section précédente, on peut dériver un algorithme qui répond à la question 3.6 posée en début de section, dans le cas où  $\alpha$  est nul. Pour cet algorithme, on aura :

**En entrée :**

- Un SHLM  $\mathcal{S}_{GV}^n = (S^1, S^2, \dots, S^n)$  ;
- Un loi de contrôle  $u$  de type PI comme définie jusqu'ici et donc définie par ses couples de coefficients  $\left( (k_p^1, k_i^1), (k_p^2, k_i^2), \dots, (k_p^n, k_i^n) \right)$  ;
- Deux paramètres de perturbations  $\tau_d$ , et  $\beta$  définissant  $\mathcal{D}_{\tau_d, \beta}$  ;
- Trois paramètres  $\epsilon_M, \epsilon_m$  et  $\tau_s$  définissant les spécifications  $\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s)$  ;



**En sortie** La réponse Vrai si

$$(\mathcal{S}_{\text{GV}}^n, I_0 = \{\mathbf{x}_{eq}(\cdot)\}, \mathbf{r} = 0, u) \models (\mathbf{Sp}(\epsilon_M, \epsilon_m, \tau_s), \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta})$$

et Faux sinon.

**1<sup>ère</sup> étape :**  
**Calcul** de  $(\mathcal{S}_{\text{GV}}^n, \rightarrow)$ , graphe des transitions de  $\mathcal{S}_{\text{GV}}^n$

**2<sup>ème</sup> étape** Vérification dans chaque mode

**Pour**  $i=1..n$  fait

**Calcul** de  $\mathbf{H}_0^i(s)$  et de  $H_f^i(s)$

**Pour**  $p \in \text{Poles}(\mathbf{H}_0^i) \cup \text{Poles}(H_f^i)$  fait

**Si**  $\text{Re}(p) \geq 0$

**Retourne** Faux;

**FinSi**

$\tau \leftarrow \min(\tau_d, \tau_s)$

$\lambda \leftarrow \frac{1}{\tau} \ln \frac{\epsilon_m}{\epsilon_M}$

**Calcule**  $f_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( H_f^j(s) \frac{\beta}{s} \right) (t)$

**Si**  $\exists t$  tel que  $|f_i(t)| > \epsilon_M e^{-\lambda t}$

**Retourne** Faux;

**FinSi**

**FinPour**

**FinPour**

**3<sup>ème</sup> étape** Vérification des transitions

**Pour**  $(i, j) \in \rightarrow$  fait

**Calcule**  $d_0^{max}$  selon 3.13

**Calcule**  $g_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( d_0^{max} \mathbf{H}_0^i(s) \left( \mathbf{x}_{eq}^i(1) - \mathbf{x}_{eq}^j(1) \right) \right) (t)$

**Si**  $\exists t$  tel que  $|f_j(t) + g_{ij}(t)| > \epsilon_M e^{-\lambda t}$

**Retourne** Faux;

**FinSi**

**FinPour**

**Retourne** Vrai;

### Complexité

Il est difficile d'évaluer la complexité de cet algorithme car il fait intervenir de manière implicite des calculs potentiellement complexes : principalement le calcul de valeurs propres pour les pôles dans la deuxième étape et les calculs de transformées de Laplace inverse dans les deuxièmes et troisièmes étapes. Cependant, on peut faire le calcul suivant : pour un système à  $n$  états, le graphe

des transitions comporte au maximum  $2 * C_n^2 = n * (n - 1)$  transitions. Si on considère le système  $S_{GV}^5$  composé de 5 états dont la matrice  $A$  est de dimension 5, on a alors dans le pire cas à calculer :

- Les pôles de 5\*5 fonctions de transfert pour les  $\mathbf{H}_0^i$  plus ceux de 5 fonctions de transfert pour les  $H_f^i$ .
- La transformée de Laplace inverse de 5 fonctions pour le calcul des  $f_i$
- La transformée de Laplace inverse de  $5 * (5 - 1) * 5 = 100$  fonctions pour le calcul des  $g_{ij}$

Une exécution de l'algorithme, implémenté en MATLAB, dans ce pire cas prend sur une machine standard quelques secondes.

### Intérêts et inconvénients

Ce temps d'exécution est à comparer au temps qu'il aurait fallu pour obtenir le même résultat avec la même confiance en effectuant des simulations exhaustives ou des calculs d'atteignabilité coûteux pour des systèmes de cette dimension et de cette complexité. Ce faible temps s'explique par le fait que les algorithmes utilisés pour les calculs cités ci-dessus sont uniquement des algorithmes d'algèbre linéaire classiques et donc depuis longtemps très efficaces dans ces dimensions. Le principal inconvénient de cet algorithme est sa spécificité au problème posé. Il peut être difficile de trouver un algorithme équivalent si l'on change la structure du système ou même la structure du contrôleur.

### 3.4.5 Cas problématiques lorsque $\alpha > 0$

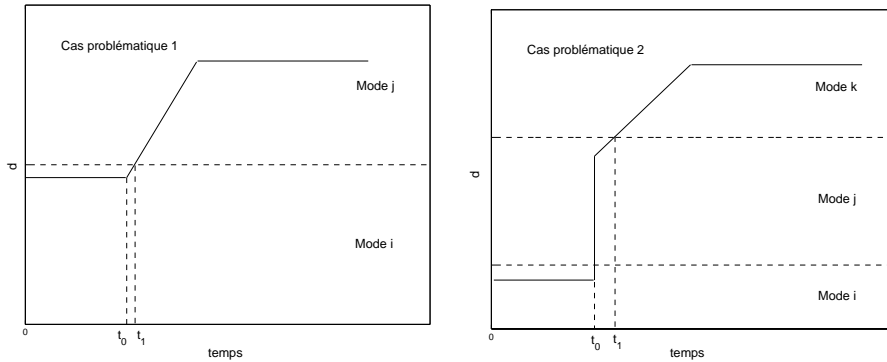


FIG. 3.12 – Deux scénarii de perturbations difficiles à caractériser

La figure 3.12 montre deux scénarii de perturbations qui posent des difficultés supplémentaires par rapport aux cas traités par l'algorithme de la section précédente. Dans les deux cas, le profil de  $d$  fait intervenir une discontinuité dans la perturbation à l'instant  $t_0$  suivi par un changement de mode à l'instant  $t_1$  proche de  $t_0$ . Dans le deuxième cas, la discontinuité en  $t_0$  est accompagnée d'un changement de mode, comme dans le cas 2 traité ci-dessus. L'erreur provient alors du saut de  $d$ , additionnée de deux changements de modes quasiment consécutifs.

Dans ces deux cas, l'erreur est difficile à caractériser car les hypothèses 1 et 2 utilisées précédemment ne peuvent plus être justifiées. En effet, on ne peut plus supposer que le système est à l'équilibre ou stabilisé à l'instant  $t_1$ , puisque la dernière cause d'erreur est datée de  $t_0$  par hypothèse proche de  $t_1$ . De ce fait, à  $t_1$  il est encore dans un état non déterminé qu'on ne peut rapprocher facilement d'états fixes calculables comme les points d'équilibre  $\mathbf{x}_{eq}(d)$ .

Cependant, il semble raisonnable de penser que si on applique avec succès le résultat 1 pour chaque mode du système pour  $\mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta}$  et  $\mathbf{Sp}(\epsilon_m, \epsilon_m, \tau_s)$  puis qu'on applique l'algorithme encore avec succès pour les mêmes spécifications mais avec  $\mathcal{D}_{\tau_d, 0, \beta}$  alors on aura quelque chose comme :

$$(\mathcal{S}_{GV}^n, I_0, \mathbf{r} = 0, u) \models (\mathbf{Sp}(2\epsilon_m, \epsilon_m, \tau_s), \mathcal{D}_{\tau_d, \alpha, \beta})$$

Mais un travail théorique reste à faire pour confirmer ou infirmer cette intuition.

# Chapitre 4

## Observateurs

### Introduction

Dans cette partie, j'expose une méthode pour détecter les capteurs défectueux. L'idée la plus simple et la plus classique pour gérer ce type de problèmes est d'utiliser plusieurs capteurs pour une même mesure et de comparer les valeurs données. Si l'une de ces valeurs diffère anormalement des autres, on considère que le capteur responsable est défectueux et on le rejette. Ceci est valable si on dispose d'au moins trois mesures, auquel cas on peut faire un vote 2-1. Mais si on n'a que deux capteurs, il devient difficile de déterminer objectivement lequel donne une valeur correcte; d'autant plus si les capteurs sont naturellement biaisés et donc ne donnent jamais les mêmes valeurs comme c'est le cas dans le GV.

Si le nombre de capteurs redondants est insuffisant pour pouvoir décider d'une panne, il faut se baser sur une autre source d'information qui est la dynamique du système. En effet, la variable mesurée est supposée évoluer en fonction des autres variables du système suivant une certaine dynamique, donc la mesure de ces variables peut donner des indications sur la cohérence de la mesure donnée par le capteur suspect. Dans la littérature, on parle de redondance analytique (analytical redundancy dans [11] par exemple).

La méthode présentée dans cette partie est basée sur cette idée général et plus particulièrement sur les observateurs de Luenberger dont je rappelle le principe dans la première section, pour expliquer ensuite comment les utiliser pour la détection de fautes de capteurs.

### 4.1 Observateurs et systèmes linéaires

Dans cette section, on rappelle les principes et les résultats de base sur les observateurs de systèmes linéaires, ou observateurs de Luenberger, du nom de celui qui le premier les exposa ([8]).

Soit donc un système linéaire de dimension  $n$ , contrôlé par  $\mathbf{u}$  de dimension  $p$  :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Supposons que l'on souhaite concevoir une loi de contrôle simple du type feedback,  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \forall t$ . Pour cela, il faut que  $\mathbf{x}(t)$  soit disponible à chaque

instant, or généralement, on ne mesure qu'un vecteur  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \forall t$$

Comme  $C \in \mathcal{M}_{m,n}$  n'est ni nécessairement inversible, ni même forcément carrée,  $\mathbf{x}(t)$  ne peut donc pas être a priori obtenu simplement.

Nous allons voir que si l'on dispose des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$ , et si ces matrices satisfont un critère que l'on précisera, on peut construire un système linéaire

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A_{obs}\tilde{\mathbf{x}} + B_{obs}\tilde{\mathbf{u}}, \quad (4.1)$$

qu'on appellera observateur tel que l'estimation de  $\mathbf{x}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}$  converge "arbitrairement vite" vers  $\mathbf{x}$  à chaque instant.

Considérons d'abord le système uniquement construit à partir des matrices  $A$  et  $B$  et de la loi de contrôle  $\mathbf{u}$  :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}. \quad (4.2)$$

Par unicité des solutions des équations différentielles linéaires, il est clair que si il existe un instant  $t_0$  tel que  $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ , alors  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ ,  $\forall t$ . En particulier, il suffirait que  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$  pour que l'estimation soit exacte. Si ce n'est pas le cas, on dispose quand même d'un moyen d'estimer l'erreur que l'on commet : c'est la quantité  $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - C\tilde{\mathbf{x}} - D\mathbf{u}(t)$ . L'observateur de Luenberger est construit en utilisant cette quantité comme feedback dans le système (4.2). Il est donc de la forme :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + L(\mathbf{y} - C\tilde{\mathbf{x}} - D\mathbf{u}) \quad (4.3)$$

$$= (A - LC)\tilde{\mathbf{x}} + (B - LD)\mathbf{u} + L\mathbf{y} \quad (4.4)$$

Où  $L$  est une matrice à déterminer et où l'on pose

$$A_{obs} = A - LC \quad (4.5)$$

$$B_{obs} = (B - LD \quad L) \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

pour se ramener à la forme (4.1).

Soit  $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ , l'erreur d'estimation, un calcul rapide montre qu'alors  $\mathbf{e}$  vérifie :

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = A_{obs}\mathbf{e}(t)$$

Autrement dit, si la matrice  $A_{obs}$  est stable (si ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives), l'erreur d'estimation converge de manière exponentielle vers  $\mathbf{0}$ . Pour préciser sous quelles conditions ceci est possible, nous allons donner une définition et un théorème classique en théorie du contrôle linéaire (voir par exemple [3] ou [2]) :

**Définition 3** *Le système de rang  $n$*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.8)$$

est dit observable si et seulement si la matrice

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang  $n$ .

Et pour les systèmes observables, bien nommés, on a le théorème suivant :

**Théorème 1** *Si le système (4.8) est observable, alors pour un ensemble arbitraire de nombres complexes  $\{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$ , on peut choisir une matrice  $L$  telle que l'ensemble des valeurs propres de  $A_{obs} = A - LC$  soit exactement*

$$\rho(A_{obs}) = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Donc si le système que l'on considère est observable, on peut choisir la matrice  $L$  de telle sorte que l'observateur de Luenberger donne une estimation  $\hat{\mathbf{x}}$  qui converge à la vitesse voulue vers  $\mathbf{x}$  en fixant les parties réelles des  $\lambda_i$  suffisamment loin dans les négatifs.

## 4.2 Observateurs et détection d'erreurs

On considère le cas d'un système linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ y &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (4.9)$$

On suppose qu'on dispose de deux capteurs pour évaluer  $y$ . On mesure donc en pratique un vecteur  $\mathbf{y}_m$  de dimension 2 tel que si tout se passe bien :

$$y_m^1(t) = y_m^2(t) = y(t)$$

On suppose que  $y_m^1$  est susceptible d'être erroné et le problème est donc détecter le plus rapidement possible un tel cas d'erreur.

On suppose enfin que le système est observable.

### 4.2.1 Fonction résidu

Dans la problématique de la détection de fautes, on a pas besoin de la reconstruction complète de l'état  $\mathbf{x}(t)$ , mais plutôt d'une fonction évoluant parallèlement au système et dont la valeur à chaque instant indique si le capteur est défectueux ou s'il est fiable. Une telle fonction est généralement appelée résidu, notée  $r(t)$  (à ne pas confondre avec le signal de référence  $\mathbf{r}$  de la partie précédente mais ce dernier ne sera plus mentionné dans la suite) et vérifie dans l'idéal :

$$r(t) \begin{cases} = 0 & \text{si le capteur fonctionne correctement} \\ \neq 0 & \text{si le capteur est défectueux} \end{cases} \quad (4.10)$$

On peut générer une telle fonction à partir d'un observateur de Luenberger en posant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= A_{obs}\hat{\mathbf{x}} + B_{obs}\tilde{\mathbf{u}} \\ r &= y_m^1 - (C\hat{\mathbf{x}} + D\mathbf{u}) \end{cases} \quad (4.11)$$

Où  $A_{obs}$ ,  $B_{obs}$  sont définis comme en 4.5 et

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ y_m^1 \end{pmatrix}$$

On a vu que si  $A_{obs}$  est stable, et si de plus  $y_m^1 = y$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}$  converge vers  $\mathbf{x}$ , et donc il est clair que  $r$  converge vers 0. Mais  $y_m^1$  étant supposé non fiable, on a d'une manière générale :

$$y_m^1(t) = y(t) + v(t)$$

Où  $v$  est donc la fonction représentant l'erreur de mesure. Après calculs, cela entraîne que

$$\dot{\epsilon}(t) = A_{obs}\epsilon(t) + Lv(t)$$

donc l'erreur d'estimation de  $\mathbf{x}$  vaut

$$\epsilon(t) = e^{A_{obs}t}\epsilon(0) + \int_0^t e^{A_{obs}(t-s)}Lv(s)ds$$

Or

$$r(t) = C\epsilon(t) + v(t)$$

donc finalement,

$$r(t) = Ce^{A_{obs}t}(\mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0)) + \int_0^t Ce^{A_{obs}(t-s)}Lv(s)ds + v(t)$$

De cette manière, si  $v(t) = 0$ , alors  $r(t) = Ce^{A_{obs}t}(\mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0))$  qui converge vers 0. De plus, comme le système est observable, on a vu que l'on peut choisir  $L$  de manière à rendre cette convergence aussi rapide que l'on veut. Il suffit en fait que le temps caractéristique de cette convergence soit très inférieur aux autres temps caractéristiques d'évolution du système ( $\tau_s, \tau_d...$ ). Ainsi, on peut considérer comme négligeable le premier terme dans l'expression de  $r$  ci-dessus et donc :

$$r(t) \begin{cases} \simeq 0 & \text{si } v(t) = 0 \\ \simeq \int_0^t Ce^{A_{obs}(t-s)}Lv(s)ds + v(t) \neq 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

ce qui correspond à ce que l'on voulait en 4.10 puisque le capteur est défaillant si et seulement si  $v$  est nul.

## 4.2.2 Automate de décision

L'intérêt de la fonction résidu est que sa valeur ne dépend que de la présence d'erreur dans la mesure. Le système peut évoluer comme bon lui semble par ailleurs, être stable, instable, voire chaotique, si la dynamique est respectée et les mesures exactes, le résidu restera nul ou très proche de zéro.

Concrètement, pour décider que le capteur est défaillant, on se donne un seuil au delà duquel  $r$  est considéré comme susceptible d'indiquer la présence d'une erreur et si ce seuil est dépassé pendant plus d'un certain temps, la défaillance est confirmée.

On construit donc un automate temporisée composé de 3 états :

**Capteur<sub>1</sub>** Le système utilise le capteur 1 considéré comme fiable. On reste dans cet état tant que  $|r(t)| < \text{Seuil}$  et si ce n'est pas le cas on transite vers l'état **Capteur<sub>1</sub> Suspect**.

**Capteur<sub>1</sub> Suspect** En entrant dans cet état, la variable *time\_out* prend la valeur de l'horloge *temps* à l'entrée on reste dans cet état tant que  $|r(t)| > \text{Seuil}$  et  $|\text{temps} - \text{time\_out}| < t_{max}$ . Si la première condition est violée c'est-à-dire si le résidu retrouve une valeur proche de 0, on retourne dans l'état **Capteur<sub>1</sub>** (et ce dernier est excusé). Si la deuxième condition est violée c'est-à-dire si on reste plus d'un temps  $t_{max}$  dans cet état, on entre dans l'état **Capteur<sub>2</sub>**.

**Capteur<sub>2</sub>** C'est un état puit où le système utilise le deuxième capteur à la place du premier jugé défaillant.

Une implémentation Stateflow de cet automate est présentée par la figure 4.1.

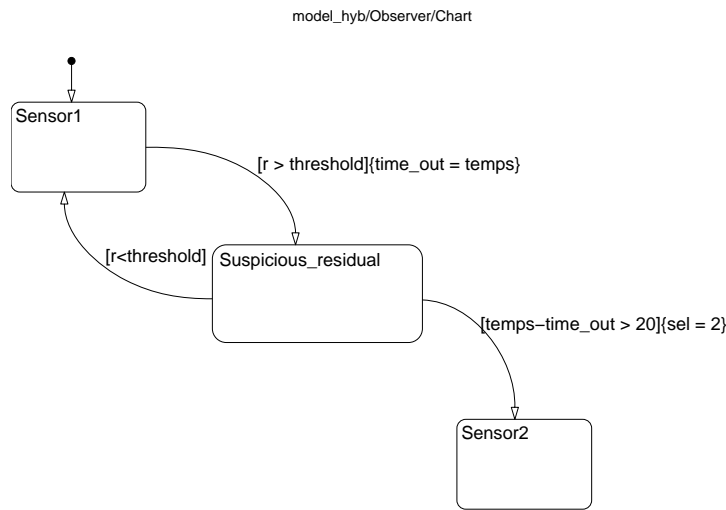


FIG. 4.1 – StateChart décidant en fonction de la valeur du résidu si le capteur 1 est déféctueux. A l'entrée de l'état 'Suspicious residual', un timer est initialisé. Si le système reste trop longtemps dans cet état, il passe dans l'état où le deuxième capteur est utilisé.

### 4.2.3 Exemple dans le cas de $S_{50}$

La figure 4.2 donne un exemple de comportement de la fonction résidu dans le cas où le système linéaire est le système :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A_{50}\mathbf{x} + B_{50} \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \\ y &= \mathbf{c}_{50}\mathbf{x} \end{cases}$$

Le système est sous contrôle et la perturbation est prise constante égale à 50 mais dans le contexte de l'observation, on ne fait pas la distinction entre ces



deux paramètres qui sont justes deux entrées et qu'on rassemble dans un unique vecteur

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple, le capteur 1 ( $N_{ge1}$ ) est fiable jusqu'à  $t = 400$  à partir de quand on lui ajoute un rampe de pente 0.5 pour simuler une dérive de la mesure.

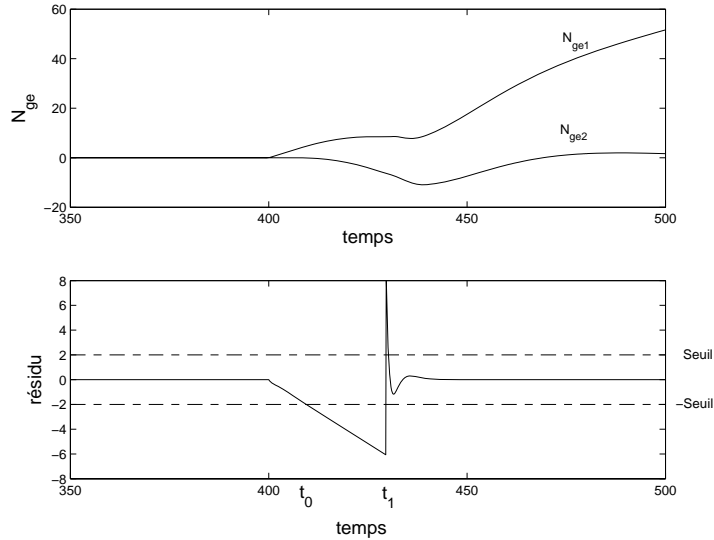


FIG. 4.2 – A  $t_0$ , le résidu dépasse en valeur absolue le seuil fixé. Ce dépassement dure plus que le  $t_{max}$  choisi et donc à  $t_1 = t_0 + t_{max}$  le système utilise le deuxième capteur. Le contrôleur compense alors la perturbation engendrée et restabilise l'ensemble.

### 4.3 Application au cas hybride

L'idée de l'utilisation de l'observateur de Luenberger pour la détection de faute est apparentée au travail d'Andrea Balluchi et Al ([?, Ballu] sur les observateurs de systèmes hybrides. Leur problème est le suivant : étant donné un système hybride, comment déterminer ses états discrets et continus à un instant donné à partir de la trajectoire parcourue avant cet instant ? Le principe général de leur approche est d'abord d'essayer de deviner l'état discret à partir de la trace discrète de la trajectoire et si cette trace est insuffisante, d'utiliser un observateur dans chaque état qui permet :

- par une fonction résidu de dire si le système se trouve dans cet état suivant sa proximité de zéro et si c'est le cas,
- de reconstituer l'état continu à partir de  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

Dans le cas du SHLM, le problème est plus simple car l'état discret est toujours directement observable à partir de la perturbation  $d$  mais le principe est le même



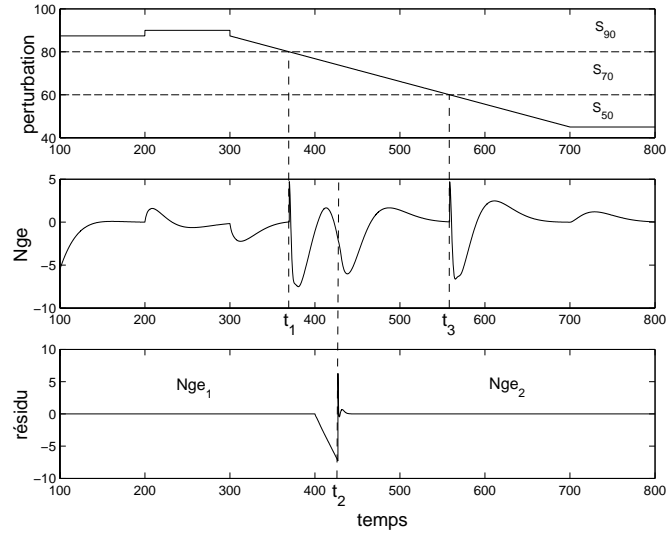


FIG. 4.4 – L'évolution du résidu est complètement indépendante des changements de modes en  $t_1$  et  $t_3$ , ainsi que de l'allure un peu agitée de  $N_{ge}$  qui en résulte. Sa réaction est rigoureusement identique à celle de la figure 4.2 car le scénario de panne de capteur est le même.

## 4.4 Conclusion

Le domaine de la tolérance de fautes de capteurs est vaste et l'on a fait ici que l'effleurer. Beaucoup de choses peuvent être faites à partir de cette approche comme :

- Introduire du bruit et un biais dans les capteurs pour coller plus à la réalité du problème du GV.
- Choisir la matrice  $L$  en fonction de ce bruit éventuel : en effet, en présence de bruit, il faut éviter de choisir cette matrice de norme trop grande car elle tend à l'amplifier (envisager l'utilisation de filtres de Kalman) ;
- Traiter le cas de plusieurs capteurs défaillants ;
- Intégrer la présence de capteurs défaillants dans l'analyse de conformité à des spécifications du chapitre précédent. En effet, le passage d'un capteur défaillant à un capteur sain induit une erreur dans la variable contrôlée (et mesurée). Comment spécifier et quantifier cet erreur en fonction des performances du contrôleur et de l'observateur ?

Cependant, le principal résultat positif de cette partie est que le caractère hybride du SHLM n'affecte pas les bonnes propriétés en termes de détection d'erreurs, de la fonction résidu obtenue par un observateur de Luenberger.

## Chapitre 5

# Conclusion

Le gros de ce travail a d'abord été de bien comprendre les problématiques posées par l'étude de cas conçue par EDF : en premier lieu, la problématique de la dynamique non linéaire, complexe et connue partiellement par des linéarisations en un nombre limité de points de fonctionnement du GV. Cette connaissance partielle est représentative du fait que la dynamique réelle, physique, du réacteur est effectivement complexe et que, comme il est dit dans [1], dans l'optique de la conception d'un contrôleur, un modèle simplifié doit être utilisé. Ce décalage entre la simplicité d'un modèle linéaire connu et la complexité d'un système physique réel est simulé dans les spécifications de l'étude de cas par le fait que le simulateur MATLAB du GV fourni est fourni en boîte noire. Par ailleurs, ce simulateur ne dispose que d'un nombre limité de scénarii de fonctionnements, et donc d'un nombre limité d'entrées possibles. Dans ces conditions, il m'a semblé difficile d'effectuer un travail en utilisant ce simulateur qui soit à la fois bien fondé théoriquement et testable de manière complète en pratique.

Pour ces raisons, j'ai préféré concevoir mon propre modèle, basé sur la théorie des automates hybrides, qui soit une approximation raisonnable du système réel, mais dont je puisse maîtriser tous les paramètres : c'est-à-dire la complexité de la dynamique linéaire, le nombre d'états, les entrées et sorties, etc. Une fois ce modèle établi et formalisé, j'ai pu reformuler le problème de la conception d'un contrôleur fiable. J'ai indiqué dans quel sens exact, en termes de conformité à des spécifications précises, je donnais au mot fiable. J'ai montré que l'on pouvait ramener ce problème au problème de la vérification d'un contrôleur paramétré. J'ai donné ensuite une méthode pour résoudre ce dernier problème, ainsi qu'un algorithme dérivé de cette méthode. Enfin, j'ai abordé l'autre problématique de l'étude de cas qui est celle de la tolérance aux fautes de capteurs. Cette problématique a été adaptée et simplifiée pour le modèle hybride et une solution a été proposée dans ces conditions.

Ce travail peut être continué et amélioré de plusieurs façons, d'abord au niveau de la tolérance des fautes comme indiqué dans la conclusion de la partie précédente, ensuite en collaboration avec EDF en utilisant un simulateur plus souple qui permettrait d'estimer dans quelle mesure le modèle hybride développé et étudié peut être proche du système réel, et donc comment on peut utiliser pour ce système les résultats théoriques obtenus.

# Bibliographie

- [1] P. Bendotti, C-M. Falinower, J-M. Legros, *Steam generator water level control : A benchmark for hybrid control techniques*, [www.dii.unisi.it/%7Ehybrid/cc/casestudies/EDF/EDF\\_TestCase.html](http://www.dii.unisi.it/%7Ehybrid/cc/casestudies/EDF/EDF_TestCase.html), May 2002
- [2] Torkel Glad, Lennart Ljung, *Control Theory, Multivariable and Nonlinear Methods*, Taylor and Francis, London and New York, 2000.
- [3] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory And Design, third edition*, New York, Oxford University Press, 1999.
- [4] These doctorale (Ph.D. thesis) Thao Dang. *Verification and Synthesis of Hybrid Systems*. Verimag, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [5] Michael S. Branicky, *Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 43, No. 4, Avril 1998.
- [6] Michael S. Branicky, *Stability of Switched and Hybrid Systems*, Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, December 14-16, 1994.
- [7] A. Balluchi, L. Benvenuti, M. D. Di Benedetto, A. L. Sangiovanni-Vincentelli : *Design of observers for hybrid systems*, Proc. HSCC2002, LNCS 2289, pp 76-89, 2002.
- [8] D. G. Luenberger. *An introduction to observers* : IEEE Transactions on Automatic Control, 16(6) :596-602, Dec 1971.
- [9] M.-A. Massoumnia, G.C. Verghese and A.S. Willsky : *Failure detection and identification. IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(3) :316-21, March 1989.
- [10] Maria Elena Valcher and Jan C. Willems : *Observer Synthesis in the Behavioral Approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 12, December 1999
- [11] Frank, P. : *Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy a survey and some new results Automatica* 26, 459 474,1990