Feuille 5

Exercice 18

Pour chacun des automates minimals des Exercices 8, 9 et 10 calculez une expression régulière équivalente.

Exercice 19

Démontrer le Lemme d'Arden.

Exercice 20

L'ensemble des expressions régulières étendues est obtenu en ajoutant aux expressions régulières les constructions suivantes:

- Si e est une expression régulière sur Σ alors $\neg e$ est une expression régulière sur Σ.
- Si e et e' sont des expressions régulières sur Σ alors $e \cap e'$ sont des expressions régulières.
- Si e est une expression régulière sur Σ alors $e^{\underline{+}}$ est une expression régulière sur Σ.

La sémantique de ces opérateurs est telle que

- $L(\neg e) = \Sigma^* \setminus L(e)$.
- $L(e \cap e') = L(e) \cap L(e')$.
- $L(e^{\underline{+}}) = L(e) \cdot L(e)^*$.

Démontrez qu'il existe un algorithme qui transforme toute expression régulière étendue en une expression régulière équivalente.

Exercice 21

Démontrez les lois algébriques sur les expressions régulières suivantes:

1. $R + S = S + R$.
2. $(R + S) + T = R + (S + T)$.
3. $(RS)T = R(ST)$.
4. $R(S + T) = RS + RT$.
5. $(R + S)T = RT + ST$.
6. $(\mathbf{R}^*)^* = \mathbf{R}^*$.
7. $(\epsilon + R)^* = R^*$.
8. $(\mathbf{R}^*\mathbf{S}^*)^* = (\mathbf{R} + \mathbf{S})^*$.

Exercice 22

Démontrez ou falsifiez les égalités suivantes:

1. $(\mathbf{R}+\mathbf{S})^* = \mathbf{R}^* + \mathbf{S}^*$.
2. $(RS+R)^*R = R(SR+R)^*$.
3. $(\mathbf{RS}+\mathbf{R})^*\mathbf{RS} = (\mathbf{RR}^*\mathbf{S})^*$.
4. $(R+S)^*S = (R^*S)^*$.
5. $S(RS+S)^*R = RR^*S(RR^*S)^*$.

Exercice 23

Soit $\Sigma = \{0\}$ et soit Σ' un alphabet quelconque.

- Montrez que $\{0^i \mid i \text{ est premier}\}$ n'est pas régulier.
- Montrez que $\{u \in \Sigma'^* \mid |u| \text{ est premier}\}$ n'est pas régulier.
- Montrez que $\{0^i \mid i \text{ est un carré}\}$ n'est pas régulier.
- Montrez que $\{u \in \Sigma'^* \mid |u| \text{ est un carré}\}$ n'est pas régulier.
- Montrez que $\{0^i 1^j 2^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.