Solutions des Exercices de la Séance du 29 avril 2020

Stéphane Devismes

29 avril 2020

Exercice 1 (EXO 108 : Égalité) *Prouver les formules suivantes :*

1. $R(a,c) \wedge (a = b) \Rightarrow R(b,c)$.
2. $x = y \Rightarrow f(x,z) = f(y,z)$.
3. $\forall x \exists y (x = y)$.
4. $\exists x \forall y\ x = y \Rightarrow \forall x \forall y\ x = y$. *(*)*

<u>Réponse:</u>

1. $R(a,c) \wedge (a = b) \Rightarrow R(b,c)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $R(a,c) \wedge (a = b)$	
1	2	$R(a,c)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$a = b$	$\wedge E2$ 1
1	4	$R(\underline{b},c)$	Congruence 2,3
	5	Donc $R(a,c) \wedge (a = b) \Rightarrow R(b,c)$	$\Rightarrow I$ 1,4

2. Preuve de $x = y \Rightarrow f(x,z) = f(y,z)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $x = y$	
1	2	$f(x,z) = f(x,z)$	Réflexivité
1	3	$f(x,z) = f(\underline{y},z)$	Congruence 1,2
L'égalité 1 permet de remplacer dans 2 l'occurrence qui est soulignée en 3			
	4	Donc $x = y \Rightarrow f(x,z) = f(y,z)$	$\Rightarrow I$ 1,3

3. Preuve de $\forall x \exists y (x = y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
	1	$x = x$	Réflexivité
	2	$\exists y (x = y)$	$\exists I$ 1, x
	3	$\forall x \exists y (x = y)$	$\forall I$ 2

Pour la deuxième ligne, remarquez que $x = x \equiv (x = y) < y := x >$.

4. $\exists x \forall y\ x = y \Rightarrow \forall x \forall y\ x = y$

contexte	numéro	ligne	règle
1	1	Supposons $\exists x \forall y\ x = y$	
1,2	2	Supposons $\forall y\ x = y$	
1,2	3	$x = u$	$\forall E$ 2, u
1,2	4	$x = y$	$\forall E$ 2, y
1,2	5	$\underline{u} = y$	Congruence 3,4
1,2	6	$\forall y\ u = y$	$\forall I$ 5
1,2	7	$\forall u \forall y\ u = y$	$\forall I$ 6
1,2	8	$\forall x \forall y\ x = y$	Copie 7
1	9	Donc $\forall y\ x = y \Rightarrow \forall x \forall y\ x = y$	$\Rightarrow I$ 2,8
1	10	$\forall x \forall y\ x = y$	$\exists E$ 8,9
	11	Donc $\exists x \forall y\ x = y \Rightarrow \forall x \forall y\ x = y$	$\Rightarrow I$ 1,11

□

Exercice 2 (EXO 109 : Égalité,)** *Prouver que la deuxième définition de « il existe un et un seul x » :* $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$.

Réponse:

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	
1	2	$\exists x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	Supposons $P(x)$	
1,4,5	5	Supposons $P(y)$	
1,4,5	6	$P(x) \wedge P(y)$	$\wedge I$ 4,5
1,4,5	7	$\forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall E$ 3, x
1,4,5	8	$P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y$	$\forall E$ 7, y
1,4,5	9	$x = y$	$\Rightarrow E$ 6,8
1,4	10	Donc $P(y) \Rightarrow x = y$	$\Rightarrow I$ 5,9
1,4	11	$\forall y (P(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall I$ 10
1,4	12	$P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y)$	$\wedge I$ 4,11
1,4	13	$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\exists I$ 12, x
1	14	Donc $P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\Rightarrow I$ 4,13
1	15	$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\exists E$ 2,14
	16	Donc $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\Rightarrow I$ 1,15

□

Exercice 3 (EXO 112 : Examen 2012) *Prouver les formules suivantes par déduction naturelle au premier ordre.*

1. $\neg \forall x P(x) \vee \neg \exists y Q(y) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$.
2. $\forall x \forall y (P(y) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists y P(y) \Rightarrow \forall x R(x)$.
3. $\neg \forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

Réponse:

1. $\neg \forall x P(x) \vee \neg \exists y Q(y) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\neg\forall x P(x) \vee \neg\exists y Q(y)$	
1,2	2	Supposons $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$	
1,2,3	3	Supposons $\neg\forall x P(x)$	
1,2,3	4	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 2
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 3,4
1,2	6	Donc $\neg\forall x P(x) \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2,7	7	Supposons $\neg\exists y Q(y)$	
1,2,7	8	$\exists y Q(y)$	$\wedge E2$ 2
1,2,7	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 3,4
1,2	10	Donc $\neg\exists y Q(y) \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2	11	$\perp$	$\vee E$ 1,6,10
1	12	Donc $\neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$	$\Rightarrow I$ 2,11
	13	Donc $\neg\forall x P(x) \vee \neg\exists y Q(y) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$	$\Rightarrow I$ 1,12

2. $\forall x \forall y (P(y) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists y P(y) \Rightarrow \forall x R(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\forall x \forall y (P(y) \Rightarrow R(x))$	
1,2	2	Supposons $\exists y P(y)$	
1,2	3	$\forall y (P(y) \Rightarrow R(x))$	$\forall E$ 1, x
1,2	4	$P(y) \Rightarrow R(x)$	$\forall E$ 3, y
1,2,5	5	Supposons $P(y)$	
1,2,5	6	$R(x)$	$\Rightarrow E$ 4,5
1,2,5	7	$\forall x R(x)$	$\forall I$ 6
1,2	8	Donc $P(y) \Rightarrow \forall x R(x)$	$\Rightarrow I$ 5,7
1,2	9	$\forall x R(x)$	$\exists E$ 2,8
1	10	Donc $\exists y P(y) \Rightarrow \forall x R(x)$	$\Rightarrow I$ 2,9
	11	Donc $\forall x \forall y (P(y) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists y P(y) \Rightarrow \forall x R(x)$	$\Rightarrow I$ 1,10

3. $\neg\forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\neg\forall x \neg P(x)$	
1,2	2	Supposons $\neg\exists x P(x)$	
1,2,3	3	Supposons $P(x)$	
1,2,3	4	$\exists x P(x)$	$\exists I$ 3
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2,4
1,2	6	Donc $\neg P(x)$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2	7	$\forall x \neg P(x)$	$\forall I$ 6
1	8	$\perp$	$\Rightarrow E$ 7,1
1	9	Donc $\neg\neg\exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 8,2
1	10	$\exists x P(x)$	RAA 9
	11	Donc $\neg\forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,10

$\square$

Exercice 4 (EXO 113 : Examen 2013) *Prouver les formules suivantes par déduction naturelle au premier ordre.*

1. $\exists x (Q(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

2. $\forall x\, \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)) \Rightarrow \forall x \neg R(x,x)$.

Réponse:

1. $\exists x (Q(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x(Q(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\exists x(Q(x) \Rightarrow P(x))$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	`Supposons` $Q(x) \Rightarrow P(x)$	
1,4	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1,4	6	$P(x)$	$\Rightarrow E$ 4,5
1,4	7	$\exists x P(x)$	$\exists I$ 6, x
1	8	`Donc` $(Q(x) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 4,7
1	9	$\exists x P(x)$	$\exists E$ 2,8
	10	`Donc` $\exists x(Q(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,9

2. $\forall x\, \forall y(R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)) \Rightarrow \forall x \neg R(x,x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x\, \forall y(R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x))$	
1	2	$\forall y(R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x))$	$\forall E$ 1, x
1	3	$R(x,x) \Rightarrow \neg R(x,x)$	$\forall E$ 2, x
1,2	4	`Supposons` $R(x,x)$	
1,2	5	$\neg R(x,x)$	$\Rightarrow E$ 3,4
1,2	6	$\perp$	$\Rightarrow E$ 5,4
1	7	`Donc` $\neg R(x,x)$	$\Rightarrow I$ 4,6
1	8	$\forall x \neg R(x,x)$	$\forall I$ 7
	9	`Donc` $\forall x\, \forall y(R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)) \Rightarrow \forall x \neg R(x,x)$	$\Rightarrow I$ 1,8

□

Exercice 5 (EXO 114 : Quelques questions posées en examen) *Démontrer les formules suivantes par déduction naturelle.*

1. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x \neg Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$.

3. $\exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$.

Réponse:

1. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x \neg Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x \neg Q(x)$	
1,2	2	`Supposons` $P(x) \vee Q(x)$	
1,2,3	3	`Supposons` $P(x)$	
1,2,3	4	$\exists x P(x)$	$\exists I$ 3, x
1,2	5	`Donc` $P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 3,4
1,2,6	6	`Supposons` $Q(x)$	
1,2,6	7	$\forall x \neg Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,2,6	8	$\neg Q(x)$	$\forall E$ 7, x
1,2,6	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 6,8
1,2,6	10	$\exists x P(x)$	Efq 9
1,2	11	`Donc` $Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 6,10
1,2	12	$\exists x P(x)$	$\vee E$ 2,5,11
1	13	`Donc` $P(x) \vee Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 2,12
1	14	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\wedge E1$ 1
1	15	$\exists x P(x)$	$\exists E$ 13,14
	16	`Donc` $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x \neg Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow$ 1,15

2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$	
1,2	2	`Supposons` $P(x) \wedge R(x)$	
1,2	3	$P(x)$	$\wedge E1$ 2
1,2	4	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	$\wedge E1$ 1
1,2	5	$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$\forall E$ 4, x
1,2	6	$Q(x)$	$\Rightarrow E$ 3,5
1,2	7	$R(x)$	$\wedge E2$ 2
1,2	8	$Q(x) \wedge R(x)$	$\wedge I$ 6,7
1,2	9	$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$	$\exists I$ 8, x
1	10	`Donc` $P(x) \wedge R(x) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$	$\Rightarrow I$ 2,9
1	11	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\wedge E2$ 1
1	12	$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$	$\exists E$ 10,11
	13	`Donc` $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$	$\Rightarrow I$ 1,12

3. $\exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x))$	
1,2	2	`Supposons` $\neg(P(x) \vee \neg P(x))$	
1,2,3	3	`Supposons` $\neg P(x)$	
1,2,3	4	$P(x) \vee \neg P(x)$	$\vee I2$ 3
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2,4
1,2	6	`Donc` $\neg\neg P(x)$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2	7	$P(x)$	RAA 6
1,2	8	$P(x) \vee \neg P(x)$	$\vee I1$ 7
1,2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2,8
1	10	`Donc` $\neg(P(x) \vee \neg P(x)) \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 2,9
1	11	$\perp$	$\exists E$ 1,10
1	12	$\forall x P(x)$	Efq 11
	13	`Donc` $\exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,12

$\square$