# Solutions des Exercices de la Séance du 29 avril 2020

Stéphane Devismes

20 avril 2020

**Exercice 1 (EXO 102 : Déductions naturelles)** *Prouver en déduction naturelle du premier ordre les formules suivantes :*

1. *le fameux syllogisme, « Tout homme est mortel, Socrate est un homme, donc est mortel », que nous formalisons par* $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(socrate) \Rightarrow M(socrate)$.
2. $\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
3. $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.
4. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$.
5. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.
6. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$.
7. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$. *(**)*
8. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$.
9. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$.

*Dans cet exercice, les formules $P(x)$ et $Q(x)$ peuvent être remplacées par des formules* quelconques.

Réponse:

1. Le syllogisme fameux, tout homme est mortel, Socrate est un homme, donc est mortel, que nous formalisons par $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(socrate) \Rightarrow M(socrate)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(socrate)$ | |
| 1 | 2 | $H(socrate)$ | $\wedge E2$ |
| 1 | 3 | $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x))$ | $\wedge E1$ |
| 1 | 4 | $H(socrate) \Rightarrow M(socrate)$ | $\forall E$ 3, $socrate$ |
| 1 | 5 | $M(socrate)$ | $\Rightarrow E$ 2,4 |
| | 6 | `Donc` $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(socrate) \Rightarrow M(socrate)$ | $\Rightarrow I$ 1,5 |

2. $\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\forall x P(x)$ | |
| 1 | 2 | $P(y)$ | $\forall E$ 1, $y$ |
| 1 | 3 | $\exists y P(y)$ | $\exists I$ 2, $y$ |
| | 4 | `Donc` $\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$ | $\Rightarrow I$ 1,3 |

3. $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\forall x P(x)$ | |
| 1 | 2 | $P(x)$ | $\forall E$ 1, $x$ |
| 1 | 3 | $\exists x P(x)$ | $\exists I$ 2, $x$ |
| | 4 | `Donc` $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,4 |

4. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ | |
| 1 | 2 | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\forall E$ 1, $x$ |
| 1 | 3 | $P(x)$ | $\wedge E1$ 2 |
| 1 | 4 | $Q(x)$ | $\wedge E2$ 2 |
| 1 | 5 | $\forall xP(x)$ | $\forall I$ 3 |
| 1 | 6 | $\forall xQ(x)$ | $\forall I$ 4 |
| 1 | 7 | $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | $\wedge I$ 5,6 |
| | 8 | `Donc` $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,7 |

5. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ | |
| 1,2 | 2 | `Supposons` $P(x) \vee Q(x)$ | |
| 1,2,3 | 3 | `Supposons` $P(x)$ | |
| 1,2,3 | 4 | $\exists xP(x)$ | $\exists I$ 3, $x$ |
| 1,2,3 | 5 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\vee 1$ 4 |
| 1,2 | 6 | `Donc` $P(x) \Rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\Rightarrow I$ 3,5 |
| 1,2,7 | 7 | `Supposons` $Q(x)$ | |
| 1,2,7 | 8 | $\exists xQ(x)$ | $\exists I$ 7, $x$ |
| 1,2,7 | 9 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\vee 2$ 8 |
| 1,2 | 10 | `Donc` $Q(x) \Rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\Rightarrow I$ 7,9 |
| 1,2 | 11 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\vee E$ 2,6,10 |
| 1 | 12 | `Donc` $(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\Rightarrow I$ 2,11 |
| 1 | 13 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\exists E$ 1,12 |
| | 14 | `Donc` $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,13 |

6. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists xP(x)$ | |
| 1 | 2 | $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\exists xP(x)$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1,4 | 4 | `Supposons` $P(x)$ | |
| 1,4 | 5 | $P(x) \Rightarrow Q(x)$ | $\forall E$ 2, $x$ |
| 1,4 | 6 | $Q(x)$ | $\Rightarrow E$ 4,5 |
| 1,4 | 7 | $\exists xQ(x)$ | $\exists I$ 6, $x$ |
| 1 | 8 | `Donc` $P(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$ | $\Rightarrow I$ 4,7 |
| 1 | 9 | $\exists xQ(x)$ | $\exists E$ 3,8 |
| | 10 | `Donc` $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,9 |

7. $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | |
| 1,2 | 2 | Supposons $\exists x P(x)$ | |
| 1,2,3 | 3 | Supposons $P(x)$ | |
| 1,2,3 | 4 | $P(x) \vee Q(x)$ | $\vee I1$ 3 |
| 1,2,3 | 5 | $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\exists I$ 4, $x$ |
| 1,2 | 6 | Donc $P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 3,5 |
| 1,2 | 7 | $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\exists E$ 2,6 |
| 1 | 8 | Donc $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 2,7 |
| 1,9 | 9 | Supposons $\exists x Q(x)$ | |
| 1,9,10 | 10 | Supposons $Q(x)$ | |
| 1,9,10 | 11 | $P(x) \vee Q(x)$ | $\vee I2$ 10 |
| 1,9,10 | 12 | $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\exists I$ 11, $x$ |
| 1,9 | 13 | Donc $Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 10,12 |
| 1,9 | 14 | $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\exists E$ 9,13 |
| 1 | 15 | Donc $\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 9,14 |
| 1 | 16 | $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\vee E$ 1,8,15 |
| | 17 | Donc $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,16 |

8. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$ | |
| 1 | 2 | $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1 | 4 | $P(x) \Rightarrow Q(x)$ | $\forall E$ 2, $x$ |
| 1 | 5 | $Q(x) \Rightarrow R(x)$ | $\forall E$ 3, $x$ |
| 1,6 | 6 | Supposons $P(x)$ | |
| 1,6 | 7 | $Q(x)$ | $\Rightarrow E$ 6,4 |
| 1,6 | 8 | $R(x)$ | $\Rightarrow E$ 7,5 |
| 1 | 9 | Donc $P(x) \Rightarrow R(x)$ | $\Rightarrow I$ 6 8 |
| 1 | 10 | $\forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ | $\forall I$ 9 |
| | 11 | Donc $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,9 |

9. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x)$ | |
| 1 | 2 | $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\exists x\ \neg Q(x)$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1,4 | 4 | Supposons $\neg Q(x)$ | |
| 1,4 | 5 | $P(x) \Rightarrow Q(x)$ | $\forall E$ 2 |
| 1,4,6 | 6 | Supposons $P(x)$ | |
| 1,4,6 | 7 | $Q(x)$ | $\Rightarrow E$ 5,6 |
| 1,4,6 | 8 | $\perp$ | $\Rightarrow E$ 4,7 |
| 1,4 | 9 | Donc $\neg P(x)$ | $\Rightarrow I$ 6,8 |
| 1,4 | 10 | $\exists x\ \neg P(x)$ | $\exists I$ 9 |
| 1 | 11 | Donc $\neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$ | $\Rightarrow I$ 4,10 |
| 1 | 12 | $\exists x\ \neg P(x)$ | $\exists E$ 3,11 |
| | 13 | Donc $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,12 |

□

**Exercice 2 (EXO 103 : Déductions naturelles)** *Prouver les formules suivantes :*

*1.* $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$.

*2.* $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$.

*3.* $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

*4.* $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$. *(*)*

*Dans cet exercice, la formule $P(x,y)$ peut être remplacée par une formule quelconque. Par contre $Q(x)$ peut être remplacée seulement par une formule n'ayant pas y comme variable libre, et $R(y)$ peut être remplacée par une formule n'ayant pas x comme variable libre : expliquez la raison de ces contraintes.*

Réponse: Tout d'abord, les contraintes sur les formules sont nécessaires, car si elles ne sont pas respectées, nous ne pouvons pas généraliser, c'est-à-dire, introduire le « $\forall$ ».

1. $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\forall x \forall y P(x,y)$ | |
| 1 | 2 | $\forall y P(x,y)$ | $\forall E$ 1, $x$ |
| 1 | 3 | $P(x,y)$ | $\forall E$ 2, $y$ |
| 1 | 4 | $\forall x P(x,y)$ | $\forall I$ 3 |
| 1 | 5 | $\forall y \forall x P(x,y)$ | $\forall I$ 4 |
| | 6 | `Donc` $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$ | $\Rightarrow I$ 1,5 |

2. $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\exists x \exists y P(x,y)$ | |
| 1,2 | 2 | `Supposons` $\exists y P(x,y)$ | |
| 1,2,3 | 3 | `Supposons` $P(x,y)$ | |
| 1,2,3 | 4 | $\exists x P(x,y)$ | $\exists I$ 3, $x$ |
| 1,2,3 | 5 | $\exists y \exists x P(x,y)$ | $\exists I$ 4, $y$ |
| 1,2 | 6 | `Donc` $P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists P(x,y)$ | $\Rightarrow I$ 5,3 |
| 1,2 | 7 | $\exists y \exists x P(x,y)$ | $\exists E$ 6,2 |
| 1 | 8 | `Donc` $\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists P(x,y)$ | $\Rightarrow I$ 7,2 |
| 1 | 9 | $\exists y \exists x P(x,y)$ | $\exists E$ 8,1 |
| | 10 | `Donc` $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$ | $\Rightarrow I$ 1,9 |

3. $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\exists x \forall y P(x,y)$ | |
| 1,2 | 2 | `Supposons` $\forall y P(x,y)$ | |
| 1,2 | 3 | $P(x,y)$ | $\forall E$ 2, $y$ |
| 1,2 | 4 | $\exists x P(x,y)$ | $\exists I$ 3, $x$ |
| 1,2 | 5 | $\forall y \exists x P(x,y)$ | $\forall I$ 4 |
| 1 | 6 | `Donc` $\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$ | $\Rightarrow I$ 5,2 |
| 1 | 7 | $\forall y \exists x P(x,y)$ | $\exists E$ 6,1 |
| | 8 | `Donc` $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$ | $\Rightarrow I$ 1,7 |

4. $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y)))$ | |
| 1 | 2 | $Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))$ | $\forall E$ 1, $x$ |
| 1,3 | 3 | Supposons $R(y)$ | |
| 1,3,4 | 4 | Supposons $Q(x)$ | |
| 1,3,4 | 5 | $\forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))$ | $\Rightarrow E$ 2,4 |
| 1,3,4 | 6 | $R(y) \Rightarrow P(x,y)$ | $\forall E$, $y$ |
| 1,3,4 | 7 | $P(x,y)$ | $\Rightarrow E$ 6,3 |
| 1,3 | 8 | Donc $Q(x) \Rightarrow P(x,y)$ | $\Rightarrow I$ 7,4 |
| 1,3 | 9 | $\forall x Q(x) \Rightarrow P(x,y))$ | $\forall I$ 8 |
| 1 | 10 | Donc $R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y))$ | $\Rightarrow I$ 9,3 |
| 1 | 11 | $\forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$ | $\forall I$ 10 |
| | 12 | Donc $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$ | $\Rightarrow I$ 1,11 |

□

**Exercice 3 (EXO 104 : Chercher la faute)** *Considérons la formule suivante :*

$$\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)).$$

*Parmi les trois preuves suivantes une seule est correcte par déduction naturelle. Identifier la preuve correcte et justifier pourquoi les deux autres ne le sont pas.*

*1.*

| *contexte* | *numéro* | *preuve* | *règle* |
|---|---|---|---|
| *1* | *1* | Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ | |
| *1* | *2* | $\exists x\, P(x)$ | $\wedge E1$ *1* |
| *1* | *3* | $\forall x\, Q(x)$ | $\wedge E2$ *1* |
| *1,4* | *4* | Supposons $P(x)$ | |
| *1,4* | *5* | $Q(x)$ | $\forall E$ *3, x* |
| *1,4* | *6* | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\wedge I$ *4,5* |
| *1,4* | *7* | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists I$ *6, x* |
| *1* | *8* | Donc $P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ *4,7* |
| *1* | *9* | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists E$ *2,8* |
| | *10* | Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ *1,9* |

*2.*

| *contexte* | *numéro* | *preuve* | *règle* |
|---|---|---|---|
| *1* | *1* | Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ | |
| *1* | *2* | $\exists x\, P(x)$ | $\wedge E1$ *1* |
| *1* | *3* | $\forall x\, Q(x)$ | $\wedge E2$ *1* |
| *1,4* | *4* | Supposons $P(x)$ | |
| *1,4* | *5* | $Q(x)$ | $\forall E$ *3, x* |
| *1,4* | *6* | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\wedge I$ *4,5* |
| *1* | *7* | Donc $P(x) \Rightarrow P(x) \wedge Q(x)$ | $\Rightarrow I$ *4,6* |
| *1* | *8* | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\exists E$ *2,7* |
| *1* | *9* | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists I$ *8, x* |
| | *10* | Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ *1,9* |

*3.*

| *contexte* | *numéro* | *preuve* | *règle* |
|---|---|---|---|
| *1* | *1* | `Supposons` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ | |
| *1* | *2* | $\exists x\, P(x)$ | $\wedge E1$ *1* |
| *1* | *3* | $\forall x\, Q(x)$ | $\wedge E2$ *1* |
| *1,4* | *4* | `Supposons` $P(x)$ | |
| *1* | *5* | `Donc` $P(x) \Rightarrow P(x)$ | $\Rightarrow I$ *4,4* |
| *1* | *6* | $P(x)$ | $\exists E$ *2,5* |
| *1* | *7* | $Q(x)$ | $\forall E$ *3, x* |
| *1* | *8* | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\wedge I$ *6,7* |
| *1* | *9* | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists I$ *8, x* |
| | *10* | `Donc` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ *1,9* |

Réponse: Les démonstrations de 2 et 3 sont ERRONÉES.

1. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ | |
| 1 | 2 | $\exists x\, P(x)$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\forall x\, Q(x)$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1,4 | 4 | `Supposons` $P(x)$ | |
| 1,4 | 5 | $Q(x)$ | $\forall E$ 3, $x$ |
| 1,4 | 6 | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\wedge I$ 4,5 |
| 1,4 | 7 | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists I$ 6, $x$ |
| 1 | 8 | `Donc` $P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 4,7 |
| 1 | 9 | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists E$ 2,8 |
| | 10 | `Donc` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,9 |

2. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ | |
| 1 | 2 | $\exists x\, P(x)$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\forall x\, Q(x)$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1,4 | 4 | `Supposons` $P(x)$ | |
| 1,4 | 5 | $Q(x)$ | $\forall E$ 3, $x$ |
| 1,4 | 6 | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\wedge I$ 4,5 |
| 1 | 7 | `Donc` $P(x) \Rightarrow P(x) \wedge Q(x)$ | $\Rightarrow I$ 4,6 |
| 1 | 8 | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\exists E$ 2,7 ERREUR |
| 1 | 9 | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists I$ 8, $x$ |
| | 10 | `Donc` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,9 |

Il y a une erreur à la ligne 8 car $x$ est libre dans $P(x) \wedge Q(x)$.

3. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ | |
| 1 | 2 | $\exists x\, P(x)$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\forall x\, Q(x)$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1,4 | 4 | Supposons $P(x)$ | |
| 1 | 5 | Donc $P(x) \Rightarrow P(x)$ | $\Rightarrow I$ 4,4 |
| 1 | 6 | $P(x)$ | $\exists E$ 2,5 ERREUR |
| 1 | 7 | $Q(x)$ | $\forall E$ 3, $x$ |
| 1 | 8 | $P(x) \wedge Q(x)$ | $\wedge I$ 6,7 |
| 1 | 9 | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\exists I$ 8, $x$ |
| | 10 | Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,9 |

Il y a une erreur à la ligne 6, car $x$ est libre dans $P(x)$.

□

**Exercice 4 (EXO 105 : Copie)** *Prouver par déduction naturelle que $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall x \forall y P(y,x)$ en utilisant la règle de copie un minimum de fois.*

Réponse:

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\forall x \forall y P(x,y)$ | |
| 1 | 2 | $\forall y P(z,y)$ | $\forall E$ 1, $z$ |
| 1 | 3 | $P(z,x)$ | $\forall E$ 2, $x$ |
| 1 | 4 | $\forall z P(z,x)$ | $\forall I$ 3 |
| 1 | 5 | $\forall x \forall z P(z,x)$ | $\forall I$ 4 |
| 1 | 6 | $\forall x \forall y P(y,x)$ | Copie 5 |
| | 7 | Donc $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall x \forall y P(y,x)$ | $\Rightarrow I$ 1,6 |

□

**Exercice 5 (EXO 106 : Déduction naturelle)** *Prouver les formules suivantes grâce à la déduction naturelle (notez que $Q$ est une variable propositionnelle) :*

1. $\forall x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \forall x P(x)$.
2. $Q \wedge \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \wedge P(x))$.
3. $\forall x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \forall x P(x)$. *(**)*
4. $Q \vee \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \vee P(x))$.
5. $\exists x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \exists x P(x)$.
6. $Q \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \wedge P(x))$.
7. $\exists x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$.
8. $Q \vee \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$. *(*)*

*Dans cet exercice, la formule $P(x)$ peut être remplacée par une formule quelconque. Par contre, $Q$ peut être remplacée seulement par une formule n'ayant pas $x$ comme variable libre.*

Réponse:

1. $\forall x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \forall x P(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\forall x(Q \wedge P(x))$ | |
| 1 | 2 | $Q \wedge P(x)$ | $\forall E$ 1, $x$ |
| 1 | 3 | $Q$ | $\wedge E1$ 2 |
| 1 | 4 | $P(x)$ | $\wedge E2$ 2 |
| 1 | 5 | $\forall x P(x)$ | $\forall I$ 4 |
| 1 | 6 | $Q \wedge \forall x P(x)$ | $\wedge I$ 3,5 |
| | 7 | Donc $\forall x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \forall x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,6 |

2. $Q \wedge \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \wedge P(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $Q \wedge \forall x P(x)$ | |
| 1 | 2 | $Q$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\forall x P(x)$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1 | 4 | $P(x)$ | $\forall E$ 3, $x$ |
| 1 | 5 | $Q \wedge P(x)$ | $\wedge I$ 2,4 |
| 1 | 6 | $\forall x(Q \wedge P(x))$ | $\forall I$ 5 |
| | 7 | Donc $Q \wedge \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \wedge P(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,6 |

3. $\forall x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \forall x P(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $\forall x(Q \vee P(x))$ | |
| 1,2 | 2 | Supposons $\neg(Q \vee \forall x P(x))$ | |
| 1,2 | 3 | $Q \vee P(x)$ | $\forall E$ 1, $x$ |
| 1,2,4 | 4 | Supposons $\neg P(x)$ | |
| 1,2,4,5 | 5 | Supposons $\neg Q$ | |
| 1,2,4,5 | 6 | $\perp$ | $\vee E$ 3,4,5 |
| 1,2,4 | 7 | Donc $\neg\neg Q$ | $\Rightarrow I$ 5,6 |
| 1,2,4 | 8 | $Q$ | $RAA$ 7 |
| 1,2,4 | 9 | $Q \vee \forall x P(x)$ | $\vee I1$ 8 |
| 1,2,4 | 10 | $\perp$ | $\Rightarrow E$ 2,9 |
| 1,2 | 11 | Donc $\neg\neg P(x)$ | $\Rightarrow I$ 4,10 |
| 1,2 | 12 | $P(x)$ | $RAA$ 11 |
| 1,2 | 13 | $\forall x P(x)$ | $\forall I$ 12 |
| 1,2 | 14 | $Q \vee \forall x P(x)$ | $\vee I2$ 13 |
| 1,2 | 15 | $\perp$ | $\Rightarrow E$ 2,14 |
| 1 | 16 | Donc $\neg\neg(Q \vee \forall x P(x))$ | $\Rightarrow I$ 2,15 |
| 1 | 17 | $Q \vee \forall x P(x)$ | $RAA$ 16 |
| | 18 | Donc $\forall x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \forall x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,17 |

4. $Q \vee \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \vee P(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Supposons $Q \vee \forall x P(x)$ | |
| 1,2 | 2 | Supposons $Q$ | |
| 1,2 | 3 | $Q \vee P(x)$ | $\vee I1$ 2 |
| 1 | 4 | Donc $Q \Rightarrow Q \vee P(x)$ | $\Rightarrow I$ 2,3 |
| 1,5 | 5 | Supposons $\forall x P(x)$ | |
| 1,5 | 6 | $P(x)$ | $\forall E$ 5, $x$ |
| 1,5 | 7 | $Q \vee P(x)$ | $\vee I2$ 6 |
| 1 | 8 | Donc $\forall x P(x) \Rightarrow Q \vee P(x)$ | $\Rightarrow I$ 8,5 |
| 1 | 9 | $Q \vee P(x)$ | $\vee E$ 8,1,4 |
| 1 | 10 | $\forall x(Q \vee P(x))$ | $\forall I$ 9 |
| | 11 | Donc $Q \vee \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \vee P(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,10 |

5. $\exists x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \exists x P(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\exists x(Q \wedge P(x))$ | |
| 1,2 | 2 | `Supposons` $Q \wedge P(x)$ | |
| 1,2 | 3 | $Q$ | $\wedge E1$ 2 |
| 1,2 | 4 | $P(x)$ | $\wedge E2$ 2 |
| 1,2 | 5 | $\exists x P(x)$ | $\exists I$ 4, $x$ |
| 1,2 | 6 | $Q \wedge \exists x P(x)$ | $\wedge I$ 3,5 |
| 1 | 7 | `Donc` $Q \wedge P(x) \Rightarrow Q \wedge \exists x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 2,6 |
| 1 | 8 | $Q \wedge \exists x P(x)$ | $\exists E$ 7,1 |
| | 9 | `Donc` $\exists x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \exists x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,8 |

6. $Q \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \wedge P(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $Q \wedge \exists x P(x)$ | |
| 1 | 2 | $Q$ | $\wedge E1$ 1 |
| 1 | 3 | $\exists x P(x)$ | $\wedge E2$ 1 |
| 1,4 | 4 | `Supposons` $P(x)$ | |
| 1,4 | 5 | $Q \wedge P(x)$ | $\wedge I$ 2,4 |
| 1,4 | 6 | $\exists x(Q \wedge P(x))$ | $\exists I$ 5, $x$ |
| 1 | 7 | `Donc` $P(x) \Rightarrow \exists x(Q \wedge P(x))$ | $\Rightarrow I$ 4,6 |
| 1 | 8 | $\exists x(Q \wedge P(x))$ | $\exists E$ 3,7 |
| | 9 | `Donc` $Q \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \wedge P(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,8 |

7. $\exists x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\exists x(Q \vee P(x))$ | |
| 1,2 | 2 | `Supposons` $Q \vee P(x)$ | |
| 1,2,3 | 3 | `Supposons` $Q$ | |
| 1,2,3 | 4 | $Q \vee \exists x P(x)$ | $\vee I1$ 3 |
| 1,2 | 5 | `Donc` $Q \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 3,4 |
| 1,2,6 | 6 | `Supposons` $P(x)$ | |
| 1,2,6 | 7 | $\exists x P(x)$ | $\exists I$ 6, $x$ |
| 1,2,6 | 8 | $Q \vee \exists x P(x)$ | $\vee I2$ 7 |
| 1,2 | 9 | `Donc` $P(x) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 6,8 |
| 1,2 | 10 | $Q \vee \exists x P(x)$ | $\vee E$ 2,5,9 |
| 1 | 11 | `Donc` $Q \vee P(x) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 2,10 |
| 1 | 12 | $Q \vee \exists x P(x)$ | $\exists E$ 1,11 |
| | 13 | `Donc` $\exists x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$ | $\Rightarrow I$ 1,12 |

8. $Q \vee \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$.

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $Q \vee \exists x P(x)$ | |
| 1,2 | 2 | `Supposons` $Q$ | |
| 1,2 | 3 | $Q \vee P(x)$ | $\vee I1$ 2 |
| 1,2 | 4 | $\exists x(Q \vee P(x))$ | $\exists I$ 3, $x$ |
| 1 | 5 | `Donc` $Q \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$ | $\Rightarrow I$ 2,4 |
| 1,6 | 6 | `Supposons` $\exists x P(x)$ | |
| 1,6,7 | 7 | `Supposons` $P(x)$ | |
| 1,6,7 | 8 | $Q \vee P(x)$ | $\vee I2$ 7 |
| 1,6,7 | 9 | $\exists x(Q \vee P(x))$ | $\exists I$ 8, $x$ |
| 1,6 | 10 | `Donc` $P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$ | $\Rightarrow I$ 7,9 |
| 1,6 | 11 | $\exists x(Q \vee P(x))$ | $\exists E$ 6,10 |
| 1 | 12 | `Donc` $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$ | $\Rightarrow I$ 6,11 |
| 1 | 13 | $\exists x(Q \vee P(x))$ | $\vee E$ 1,5,12 |
| | 14 | `Donc` $Q \vee \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$ | $\Rightarrow I$ 1,13 |

□

**Exercice 6 (EXO 107 : Preuve)** *Prouver la formule* $\neg \exists x P(x) \Rightarrow \forall x \neg P(x)$. *Vérifier que* $P(x)$ *peut être remplacée par une formule quelconque.*
Réponse:

| contexte | numéro | preuve | règle |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | `Supposons` $\neg \exists x A$ | |
| 1,2 | 2 | `Supposons` $A$ | |
| 1,2 | 3 | $\exists x A$ | $\exists I$ 2, $x$ |
| 1,2 | 4 | $\perp$ | $\Rightarrow E$ 1,3 |
| 1 | 5 | `Donc` $\neg A$ | $\Rightarrow I$ 2,4 |
| 1 | 6 | $\forall x \neg A$ | $\forall I$ 5 |
| | 7 | `Donc` $\neg \exists x A \Rightarrow \forall x \neg A$ | $\Rightarrow I$ 1,6 |

Remarquez que dans cette preuve nous utilisons le fait que $x$ est libre pour lui-même.

□