Solutions des Exercices de la Séance du 15 avril 2020

Stéphane Devismes

12 avril 2020

Exercice 1 (EXO 88 : Unification) *Donner les unificateurs les plus généraux des termes suivants s'ils existent :*

1. $R(a, f(x)) = R(y, f(g(y,b)))$,
2. $R(y, f(x)) = R(x, f(g(y,b)))$,
3. $Q(y, f(a), f(x)) = Q(g(a,b), x, f(y))$, *et*
4. $Q(y, f(x), g(y,x)) = Q(x, f(y), g(f(a), y))$.

Réponse:

1. $R(a, f(x)) = R(y, f(g(y,b)))$
   Décomposition : $a = y$, $f(x) = f(g(y,b))$
   Orientation : $y = a$, $f(x) = f(g(y,b))$
   Elimination : $y := a$, $f(x) = f(g(a,b))$
   Décomposition : $y := a$, $x = g(a,b)$
   Elimination : $y := a$, $x := g(a,b)$
2. $R(y, f(x)) = R(x, f(g(y,b)))$
   Décomposition : $y = x$, $f(x) = f(g(y,b))$
   Elimination : $y := x$, $f(x) = f(g(x,b))$
   Décomposition : $y := x$, $x = g(x,b)$
   Elimination : échec de l'élimination de x
3. $Q(y, f(a), f(x)) = Q(g(a,b), x, f(y))$
   Décomposition : $y = g(a,b)$, $f(a) = x$, $f(x) = f(y)$
   Orientation : $y = g(a,b)$, $x = f(a)$, $f(x) = f(y)$
   Décomposition : $y = g(a,b)$, $x = f(a)$, $x = y$
   Elimination : $y := g(a,b)$, $x = f(a)$, $x = g(a,b)$
   Elimination : $y := g(a,b)$, $x := f(a)$, $f(a) = g(a,b)$
   Décomposition : échec sur la dernière équation
4. $Q(y, f(x), g(y,x)) = Q(x, f(y), g(f(a), y))$
   Décomposition : $y = x$; $f(x) = f(y)$, $g(y,x) = g(f(a), y)$
   Elimination : $y := x$, $f(x) = f(x)$, $g(x,x) = g(f(a), x)$
   Identité : $y := x$, $g(x,x) = g(f(a), x)$
   Décomposition : $y := x$, $x = f(a)$, $x = x$
   Identité : $y := x$, $x = f(a)$
   Elimination : $y := f(a)$, $x := f(a)$

□

Exercice 2 (EXO 89 : Unification) *Donner les unificateurs les plus généraux des termes suivants s'ils existent :*

1. $pair(a, crypt(z,b))$ *et* $pair(x,y)$.
2. $pair(crypt(x,b), crypt(y,b))$ *et* $pair(crypt(a,b), z)$.
3. $crypt(pair(z,a), x)$ *et* $crypt(pair(y, crypt(x,b)), b)$.
4. $crypt(pair(a,z), x)$ *et* $crypt(pair(y, crypt(x,b)), b)$.
5. $f(x,y,g(a,a))$ *et* $f(g(y,y), z, z)$
6. $f(x,y,a)$ *et* $f(y, g(z,z), x)$

Réponse: Nous donnons directement les unificateurs des termes demandés.
- $pair(a, crypt(z,b))$ et $pair(x,y)$: $\sigma = \{x := a, y := crypt(z,b)\}$
- $pair(crypt(x,b), crypt(y,b))$ et $pair(crypt(a,b), z)$: $\sigma = \{x := a, z := crypt(y,b)\}$
- $crypt(pair(z,a), x)$ et $crypt(pair(y, crypt(x,b)), b)$: pas de solution
- $crypt(pair(a,z), x)$ et $crypt(pair(y, crypt(x,b)), b)$: $\sigma = \{y := a, z := crypt(b,b), x := b\}$
- $f(x,y,g(a,a))$ et $f(g(y,y), z, z)$: $\sigma = \{x := g(g(a,a), g(a,a)), y := z := g(a,a)\}$
- $f(x,y,a)$ et $f(y, g(z,z), x)$: pas de solution

$\square$

Exercice 3 (EXO 91 : Forme clausale et instanciation,*) *Montrer que la formule suivante est valide en mettant* sa négation *sous la forme clausale et en trouvant un ensemble contradictoire d'instances des clauses obtenues :*

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)).$$

Réponse: La négation de la formule donne (à un renommage près des variables) les clauses :
- $\neg P(x) \vee Q(x)$.
- $P(y)$.
- $\neg Q(a)$.

En instanciant dans chaque clause x et y par la constante a, nous obtenons les clauses :
- $\neg P(a) \vee Q(a)$
- $P(a)$
- $\neg Q(a)$

Par résolution propositionnelle, nous en déduisons $\perp$:

(1)	$\neg P(a) \vee Q(a)$	Hyp
(2)	$P(a)$	Hyp
(3)	$\neg Q(a)$	Hyp
(4)	$Q(a)$	par résolution de 1 et 2
(5)	$\perp$	par résolution de 3 et 4

$\square$

Exercice 4 (EXO 92 : Forme clausale et preuve par résolution,)** *Considérons les formules suivantes :*

1. $H_1 = \exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$.
2. $H_2 = \forall x(P(x) \vee Q(x))$.
3. $C = \exists x \neg Q(x) \Rightarrow \forall x P(x)$.

Nous voulons montrer que C est conséquence de H_1 et H_2 par instanciation et par résolution.

1. *Mettre en forme clausale l'ensemble des trois formules H_1, H_2, $\neg C$.*
2. *Trouver des instances contradictoires des clauses obtenues et montrer par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
3. *Donner une preuve directe de cette contradiction par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que seule la dernière règle soit utilisée.*

Réponse:

Transformation en clauses : Nous obtenons les clauses suivantes à partir des hypothèses et de la conclusion.

— H_1 est transformée en $\neg P(y) \vee P(x)$.
— H_2 est transformée en $P(x) \vee Q(x)$.
— $\neg C$ est transformée en les deux clauses $\neg Q(a)$ et $\neg P(b)$.

Instanciation : Nous obtenons les instances contradictoires suivantes :

— $\neg P(a) \vee P(b)$
— $P(a) \vee Q(a)$
— $\neg Q(a)$
— $\neg P(b)$

Par résolution propositionnelle (et sans répéter les hypothèses) nous avons la preuve :

(1)	$\neg P(a) \vee P(b)$	Hyp
(2)	$P(a) \vee Q(a)$	Hyp
(3)	$\neg Q(a)$	Hyp
(4)	$\neg P(b)$	Hyp
(5)	$\neg P(a)$	Résolvant 1,4
(6)	$Q(a)$	Résolvant 2,5
(7)	$\perp$	Résolvant 3,6

Résolution binaire :

numéro	conclusion	justification	unificateur
(1)	$\neg P(y) \vee P(x)$	Hyp	
(2)	$P(x) \vee Q(x)$	Hyp	
(3)	$\neg Q(a)$	Hyp	
(4)	$\neg P(b)$	Hyp	
(5)	$\neg P(y)$	RB 1(2),4	$x := b$
(6)	$Q(x)$	RB 2(1),5	$y := x$
(7)	$\perp$	RB 3,6	$x := a$

Notons qu'à l'étape (5), nous avons précisé par la notation 1(2), que c'est le deuxième littéral de la clause 1, qui est éliminé.

□

Exercice 5 (EXO 93 : Preuve par résolution,)**

— *En utilisant une preuve par factorisation, copie et résolvant binaire prouver que la fermeture universelle de l'ensemble de clauses suivant est insatisfaisable :*

1. $P(f(x)) \vee \neg Q(y,a)$.
2. $Q(a,a) \vee R(x,x,b) \vee S(a,b)$.
3. $S(a,z) \vee \neg R(x,x,b)$.
4. $\neg P(f(c)) \vee R(x,a,b)$.
5. $\neg S(y,z) \vee \neg S(a,b)$.

— *En utilisant une preuve par factorisation, copie et résolvant binaire prouver que la fermeture universelle de l'ensemble de clauses suivant est insatisfaisable :*

1. $P(x)$.
2. $\neg P(y) \vee Q(y,x)$.
3. $\neg Q(x,a) \vee \neg Q(b,y) \vee \neg Q(b,a) \vee \neg P(f(y))$.

— *En utilisant une preuve par factorisation, copie et résolvant binaire prouver que la fermeture universelle de l'ensemble de clauses suivant est insatisfaisable :*

1. $R(x,a)$.

2. $R(y,b)$.

3. $R(z,a+b)$.

4. $\neg(b < x+b) \vee (a+b < a)$.

5. $b < z$.

6. $\neg(a+b < x) \vee \neg R(y,b)$.

Rappel : *le symbole + est plus prioritaire que le symbole <, qui est lui-même plus prioritaire que les connecteurs logiques binaires.*

Réponse:

numéro	conclusion	justification	unificateur
(1)	$\neg S(y,z) \vee \neg S(a,b)$	Hyp	
(2)	$\neg S(a,b)$	Fact 1	$y := a, z := b$
(3)	$Q(a,a) \vee R(x,x,b) \vee S(a,b)$	Hyp	
(4)	$Q(a,a) \vee R(x,x,b)$	RB 2,3	
(5)	$S(a,z) \vee \neg R(x,x,b)$	Hyp	
(6)	$\neg R(x,x,b)$	RB 2,5	$z := b$
(7)	$\neg R(y,y,b)$	Copie 6	$x := y$
(8)	$Q(a,a)$	RB 4,7	$y := x$
(9)	$P(f(x)) \vee \neg Q(y,a)$	Hyp	
(10)	$P(f(x))$	RB 8,9	$y := a$
(11)	$\neg P(f(c)) \vee R(x,a,b)$	Hyp	
(12)	$\neg P(f(c)) \vee R(z,a,b)$	Copie 11	$x := z$
(13)	$R(z,a,b)$	RB 10,12	$x := c$
(14)	$\perp$	RB 6,13	$x := a, z := a$

numéro	conclusion	justification	unificateur
(1)	$\neg P(y) \vee Q(y,x)$	Hyp	
(2)	$\neg P(y_0) \vee Q(y_0,x_0)$	Copie 1	$x := x_0, y := y_0$
(3)	$P(x)$	Hyp	
(4)	$Q(y_0,x_0)$	RB 2,3	$x := y_0$
(5)	$\neg Q(x,a) \vee \neg Q(b,y) \vee \neg Q(b,a) \vee \neg P(f(y))$	Hyp	
(6)	$\neg Q(b,a) \vee \neg P(f(a))$	Fact 5	$x := b, y := a$
(7)	$\neg P(f(a))$	RB 4,6	$y_0 := b, x_0 := a$
(8)	$\perp$	RB 3,7	$x := f(a)$

numéro	conclusion	justification	unificateur
(1)	$R(y,b)$	Hyp	
(2)	$R(y_0,b)$	Copie 1	$y := y_0$
(3)	$\neg(a+b < x) \vee \neg R(y,b)$	Hyp	
(4)	$\neg(a+b < x)$	RB 2,3	$y_0 := y$
(5)	$\neg(a+b < x_0)$	Copie 4	$x := x_0$
(6)	$\neg(b < x+b) \vee (a+b < a)$	Hyp	
(7)	$\neg(b < x+b)$	RB 5,6	$x_0 := a$
(8)	$b < z$	Hyp	
(9)	$\perp$	RB 7,8	$z := x+b$

□

Exercice 6 (EXO 96 : Forme clausale et preuve par résolution,)** *Considérons les formules suivantes :*

1. $A_1 = \exists u \forall v (P(u) \wedge (R(v) \Rightarrow Q(u,v)))$.

2. $A_2 = \forall u \forall v(\neg P(u) \vee \neg S(v) \vee \neg Q(u,v))$.
3. $A_3 = \exists v(R(v) \wedge S(v))$.

Montrer que la liste de ces trois formules est contradictoire par résolution :

1. *Mettre en forme clausale les trois formules A_1, A_2, A_3 .*
2. *Trouver des instances contradictoires des clauses obtenues et montrer cette contradiction par résolution propositionnelle.*
3. *Faire une preuve directe de $\perp$ par factorisation, copie et résolution binaire.*

Réponse:

Transformation en clauses : Nous obtenons que
- A_1 donne les deux clauses $P(a)$ et $\neg R(v) \vee Q(a,v)$.
- A_2 donne la clause $\neg P(u) \vee \neg S(v) \vee \neg Q(u,v)$.
- A_3 donne les deux clauses $R(b)$ et $S(b)$.

Instanciation : Nous obtenons les instances contradictoires suivantes :
- $P(a)$.
- $\neg R(b) \vee Q(a,b)$.
- $\neg P(a) \vee \neg S(b) \vee \neg Q(a,b)$.
- $R(b)$.
- $S(b)$.

Nous montrons cette contradiction par résolution propositionnelle :

numéro	conclusion	justification
(1)	$P(a)$	Hyp
(2)	$\neg R(b) \vee Q(a,b)$	Hyp
(3)	$\neg P(a) \vee \neg S(b) \vee \neg Q(a,b)$	Hyp
(4)	$R(b)$	Hyp
(5)	$S(b)$	Hyp
(6)	$\neg S(b) \vee \neg Q(a,b)$	Résolvant 1,3
(7)	$\neg Q(a,b)$	Résolvant 5,6
(8)	$\neg R(b)$	Résolvant 2,7
(9)	$\perp$	Résolvant 4,8

Preuve par résolution :

numéro	conclusion	justification	unificateur
(1)	$P(a)$	Hyp	
(2)	$\neg R(v) \vee Q(a,v)$	Hyp	
(3)	$\neg P(u) \vee \neg S(v) \vee \neg Q(u,v)$	Hyp	
(4)	$R(b)$	Hyp	
(5)	$S(b)$	Hyp	
(6)	$\neg S(v) \vee \neg Q(a,v)$	RB 1, 3	$u := a$
(7)	$\neg Q(a,b)$	RB 5, 6	$v := b$
(8)	$\neg R(b)$	RB 2, 7	$v := b$
(9)	$\perp$	RB 4, 8	

□

Exercice 7 (EXO 99 : Forme clausale et preuve par résolution,)** *Considérons les formules suivantes :*

1. $H_1 = \forall u(\exists v R(u,v) \Rightarrow R(u, f(u)))$.
2. $H_2 = \forall u \exists v R(u,v)$.
3. $H_3 = \exists u R(f(f(u)),u)$.
4. $C = \exists u \exists v \exists w(R(u,v) \wedge R(v,w) \wedge R(w,u))$.

Montrer que C est conséquence de H_1, H_2, H_3.

1. *Mettre en forme clausale les trois formules H_1, H_2, H_3, $\neg C$.*
2. *Trouver des instances contradictoires des clauses obtenues (montrez la contradiction par résolution propositionnelle).*
3. *Faire une preuve directe de cette contradiction par factorisation, copie et résolution binaire.*

Réponse:

Transformation en clauses

H_1 donne la clause :
— $\neg R(u,v) \vee R(u,f(u))$
H_2 donne la clause :
— $R(u,g(u))$
H_3 donne la clause :
— $R(f(f(a)),a)$
$\neg C$ donne la clause :
— $\neg R(u,v) \vee \neg R(v,w) \vee \neg R(w,u)$

Instanciation : Nous découvrons les instanciations en même temps que nous donnons une preuve de la contradiction.

numéro	conclusion	justification
(1)	$\neg R(a,g(a)) \vee R(a,f(a))$	instance de (1)
(2)	$R(a,g(a))$	instance de (2)
(3)	$R(a,f(a))$	Résolvant 1, 2
(4)	$\neg R(f(a),g(f(a))) \vee R(f(a),f(f(a)))$	instance de (1)
(5)	$R(f(a),g(f(a)))$	instance de (2)
(6)	$R(f(a),f(f(a)))$	Résolvant 4, 5
(7)	$\neg R(a,f(a)) \vee \neg R(f(a),f(f(a))) \vee \neg R(f(f(a)),a)$	instance de (4)
(8)	$\neg R(f(a),f(f(a))) \vee \neg R(f(f(a)),a)$	Résolvant 3, 7
(9)	$\neg R(f(f(a)),a)$	Résolvant 6, 8
(10)	$R(f(f(a)),a)$	clause (3)
(11)	$\perp$ Résolvant	9, 10

Preuve par résolution : La factorisation n'est pas utilisée.

numéro	conclusion	justification	unificateur
(1)	$\neg R(u,v) \vee R(u,f(u))$	Hyp	
(2)	$R(u,g(u))$	Hyp	
(3)	$R(f(f(a)),a)$	Hyp	
(4)	$\neg R(u,v) \vee \neg R(v,w) \vee \neg R(w,u)$	Hyp	
(5)	$R(u_1,g(u_1))$	Copie 2	$u := u_1$
(6)	$R(u_1,f(u_1))$	RB 1(1), 5	$u := u_1; v := g(u_1)$
(7)	$\neg R(f(u_1),w) \vee \neg R(w,u_1)$	RB 4(1), 6	$u := u_1, v := f(u_1)$
(8)	$\neg R(f(u_2),w) \vee \neg R(w,u_2)$	Copie 7	$u_1 := u_2$
(9)	$\neg R(f(f(u_2)),u_2)$	RB 6, 8(2)	$u_1 := f(u_2), w := f(f(u_2))$
(10)	$\perp$	RB 3, 9	$u_2 := a$

□