Solutions des Exercices de la Séance du 8 avril 2020

Stéphane Devismes

4 avril 2020

Exercice 1 (EXO 80 : Domaine de Herbrand) *Soient Σ la signature composée de la constante a et des symboles de fonctions f et g respectivement à un et deux arguments.*

- *Donner 5 éléments différents du domaine de Herbrand de cette signature.*
- *Définir inductivement ce domaine.*

Réponse: Voici cinq éléments du domaine de Herbrand : $a, f(a), g(a,a), f(f(a)), g(a, f(a))$. Le domaine de Herbrand D est défini inductivement par les trois seules règles suivantes :

- $a \in D$.
- Si $d \in D$ alors $f(d) \in D$.
- Si $d, e \in D$ alors $g(d,e) \in D$.

□

Exercice 2 (EXO 81 : Signature, domaine et base de Herbrand) *Pour chacun de ces ensembles de formules :*

- $\Gamma_1 = \{P(x) \vee Q(x) \vee R(x), \neg P(a), \neg Q(b), \neg R(c)\}$.
- $\Gamma_2 = \{P(x), \neg Q(x), \neg P(f(x)) \vee Q(f(x))\}$.
- $\Gamma_3 = \{P(x), Q(f(x)), \neg R(f(f(x))), \neg P(f(f(x))) \vee \neg Q(x) \vee R(f(x))\}$.

1. *Donner la signature, le domaine de Herbrand ainsi que la base de Herbrand.*
2. *Prouver si leur fermeture universelle a un modèle ou pas.*

Réponse:

1. Les signatures des ensembles de formules sont :
   - $\Sigma_{\Gamma_1} = \{a^{f0}, b^{f0}, c^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}, R^{r1}\}$.
   - $\Sigma_{\Gamma_2} = \{a^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}, f^{f1}\}$.
   - $\Sigma_{\Gamma_3} = \{a^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}, R^{r1}, f^{f1}\}$.

   Les domaines de Herbrand des ensembles de formules sont :
   - $D_{\Sigma_{\Gamma_1}} = \{a, b, c\}$.
   - $D_{\Sigma_{\Gamma_2}} = \{f^n(a), n \in \mathbb{N}\}$.
   - $D_{\Sigma_{\Gamma_3}} = \{f^n(a), n \in \mathbb{N}\}$.

   Les bases de Herbrand des ensembles de formules sont :
   - $B_{\Sigma_{\Gamma_1}} = \{P(a), P(b), P(c), Q(a), Q(b), Q(c), R(a), R(b), R(c)\}$.
   - $B_{\Sigma_{\Gamma_2}} = \{P(f^n(a)), n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a)), n \in \mathbb{N}\}$.
   - $B_{\Sigma_{\Gamma_3}} = \{P(f^n(a)), n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a)), n \in \mathbb{N}\} \cup \{R(f^n(a)), n \in \mathbb{N}\}$.
2. Nous regardons les fermetures universelles de ces ensembles de formules.
   - $\forall(\Gamma_1)$ a un modèle : Soit $E = \{P(b), Q(c), R(a)\}$. $H_{\Sigma_{\Gamma_1}, E}$ est une interprétation de Herbrand qui est modèle de l'ensemble des instances fermées de Γ_1 c'est-à-dire modèle de :

     $$\{P(a) \vee Q(a) \vee R(a), P(b) \vee Q(b) \vee R(b), P(c) \vee Q(c) \vee R(c), \neg P(a), \neg Q(b), \neg R(c)\}.$$

   - $\forall(\Gamma_2)$ est contradictoire car l'ensemble fini d'instances fermées suivant est insatisfaisable :

     $$\{P(f(a)), \neg Q(f(a)), \neg P(f(a)) \vee Q(f(a))\}.$$

— $\forall(\Gamma_3)$ est contradictoire car l'ensemble fini d'instances fermées suivant est insatisfaisable :

$$\{P(f(f(f(a)))), Q(f(a)), \neg R(f(f(a))), \neg P(f(f(f(a)))) \vee \neg Q(f(a)) \vee R(f(f(a)))\}.$$

□

Exercice 3 (EXO 82 : Méthode de Herbrand) *Utiliser la méthode de Herbrand pour démontrer que l'ensemble de formules suivant est insatisfaisable :*

1. $\forall x R(x, f(x))$
2. $\forall x \forall y (\neg S(x,y) \vee R(x,y) \vee R(y,x))$
3. $\forall x \forall y (S(x,y) \vee \neg R(x,y))$
4. $\forall x \forall y (S(x,y) \vee \neg R(y,x))$
5. $\forall y \neg S(y,a)$

Réponse: Nous obtenons les instances contradictoires suivantes :
— $R(a, f(a))$
— $S(f(a),a) \vee \neg R(a, f(a))$
— $\neg S(f(a),a)$

Par résolution propositionnelle nous avons la preuve :

(1)	$R(a, f(a))$	Hyp
(2)	$S(f(a),a) \vee \neg R(a, f(a))$	Hyp
(3)	$\neg S(f(a),a)$	Hyp
(4)	$S(f(a),a)$	Résolvant 1,2
(5)	$\perp$	Résolvant 3,4

□

Exercice 4 (EXO 83 : Méthode de Herbrand,*) *Utiliser la méthode de Herbrand pour démontrer que l'ensemble de formules suivant est insatisfaisable :*

1. $\forall x (Q(x) \vee \neg P(f(x)))$
2. $\forall y (Q(y) \Rightarrow R(y))$
3. $\forall z (\neg P(z) \Rightarrow Q(z) \vee R(z))$
4. $\forall u \neg R(u)$

En particulier, vous devez transformer votre ensemble d'instances insatisfaisable en un ensemble de clauses équivalent. Puis, vous devez démontrer la contradiction via une preuve par résolution propositionnelle à partir de ce dernier ensemble.

Réponse: Nous obtenons les instances contradictoires suivantes :

1. $Q(a) \vee \neg P(f(a))$
2. $Q(a) \Rightarrow R(a)$
3. $Q(f(a)) \Rightarrow R(f(a))$
4. $\neg P(f(a)) \Rightarrow Q(f(a)) \vee R(f(a))$
5. $\neg R(a)$
6. $\neg R(f(a))$

L'ensemble de clauses équivalent :

1. $Q(a) \vee \neg P(f(a))$
2. $\neg Q(a) \vee R(a)$
3. $\neg Q(f(a)) \vee R(f(a))$

4. $P(f(a)) \vee Q(f(a)) \vee R(f(a))$
5. $\neg R(a)$
6. $\neg R(f(a))$

Par résolution propositionnelle nous avons la preuve :

(1)	$\neg Q(a) \vee R(a)$	Hyp
(2)	$\neg R(a)$	Hyp
(3)	$\neg Q(a)$	Résolvant 1,2
(4)	$Q(a) \vee \neg P(f(a))$	Hyp
(5)	$\neg P(f(a))$	Résolvant 3,4
(6)	$\neg Q(f(a)) \vee R(f(a))$	Hyp
(7)	$\neg R(f(a))$	Hyp
(8)	$\neg Q(f(a))$	Résolvant 6,7
(9)	$P(f(a)) \vee Q(f(a)) \vee R(f(a))$	Hyp
(10)	$Q(f(a)) \vee R(f(a))$	Résolvant 5,9
(11)	$R(f(a))$	Résolvant 8,10
(12)	$\perp$	Résolvant 7,11

□

Exercice 5 (EXO 84 : Méthode de Herbrand,*) *Soit* Γ *l'ensemble de formules suivant :*

1. $\neg S(x,y) \vee \neg M(z,x) \vee M(z,y)$

2. $S(x,y) \vee M(f(x,y),x)$

3. $S(x,y) \vee \neg M(f(x,y),y)$

4. $S(c,a)$

5. $S(a,b)$

6. $\neg S(c,b)$

Déterminer un ensemble fini insatisfaisable d'instances fermées de ces formules.

On peut en déduire quelque chose à propos d'un ensemble de formules du 1erordre : lequel et que peut-on conclure ?

Réponse: Nous obtenons les instances contradictoires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & \{\neg S(c,a) \vee \neg M(f(c,b),c) \vee M(f(c,b),a), \neg S(a,b) \vee \neg M(f(c,b),a) \vee M(f(c,b),b), \quad \text{(deux instances)} \\ & & S(c,a), S(a,b), \neg S(c,b), M(f(c,b),c) \vee S(c,b), \neg M(f(c,b),b) \vee S(c,b)\} \end{array}$$

Par résolution propositionnelle nous avons la preuve :

(1)	$\neg S(c,b)$	Hyp
(2)	$M(f(c,b),c) \vee S(c,b)$	Hyp
(3)	$\neg M(f(c,b),b) \vee S(c,b)$	Hyp
(4)	$M(f(c,b),c)$	Res 1,2
(5)	$\neg M(f(c,b),b)$	Res 1,3
(6)	$\neg S(c,a) \vee \neg M(f(c,b),c) \vee M(f(c,b),a)$	Hyp
(7)	$\neg S(a,b) \vee \neg M(f(c,b),a) \vee M(f(c,b),b)$	Hyp
(8)	$\neg S(c,a) \vee M(f(c,b),a)$	Res 4,6
(9)	$\neg S(a,b) \vee \neg M(f(c,b),a)$	Res 5,7
(10)	$\neg S(c,a) \vee \neg S(a,b)$	Res 8,9
(11)	$S(c,a)$	Hyp
(12)	$\neg S(a,b)$	Res 10,11
(13)	$S(a,b)$	Hyp
(14)	$\perp$	Résolvant 12,13

Donc l'ensemble de formules

1. $\forall x \forall y(\neg S(x,y) \vee \neg M(z,x) \vee M(z,y))$
2. $\forall x \forall y(S(x,y) \vee M(f(x,y),x))$
3. $\forall x \forall y(S(x,y) \vee \neg M(f(x,y),y))$
4. $S(c,a) \wedge S(a,b) \wedge \neg S(c,b)$

est insatisfaisable.

$\square$

Exercice 6 (EXO 86 : Skolémisation et forme clausale) *Skolémiser les formules suivantes (attention aux négations !) puis les mettre en forme clausale.*

1. $\neg(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x)))$.
2. $\neg(\forall x \forall y \forall z(e(x,y) \wedge e(y,z) \Rightarrow \neg e(x,z)) \Rightarrow \neg \exists x \forall y\ e(x,y))$.
3. $\neg(\neg \forall x P(x) \vee \neg \forall x Q(x) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)))$.
4. $\forall x((\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x)) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \neg \exists x Q(x))$.
5. $\neg(\exists x \forall y \forall z((P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x))))$.

Réponse:

1. $\neg(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x)))$.

   Forme normale : $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \wedge \forall x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

   Forme propre : $(\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge \forall z(\neg P(z) \wedge \neg Q(z))$

   Elimination de $\exists$: $(P(a) \vee Q(b)) \wedge \forall z(\neg P(z) \wedge \neg Q(z))$

   Forme de Skolem : $(P(a) \vee Q(b)) \wedge (\neg P(z) \wedge \neg Q(z))$

   Forme clausale : $\{P(a) \vee Q(b), \neg P(z), \neg Q(z)\}$

2. $\neg(\forall x \forall y \forall z(e(x,y) \wedge e(y,z) \Rightarrow \neg e(x,z)) \Rightarrow \neg \exists x \forall y\ e(x,y))$.

   Forme normale : $(\forall x \forall y \forall z(\neg e(x,y) \vee \neg e(y,z) \vee \neg e(x,z))) \wedge \exists x \forall y\ e(x,y)$

   Forme propre : $(\forall x \forall y \forall z(\neg e(x,y) \vee \neg e(y,z) \vee \neg e(x,z))) \wedge \exists u \forall v\ e(u,v)$

   Elimination de $\exists$: $(\forall x \forall y \forall z(\neg e(x,y) \vee \neg e(y,z) \vee \neg e(x,z)) \wedge \forall v\ e(a,v)$

   Forme de Skolem : $(\neg e(x,y) \vee \neg e(y,z) \vee \neg e(x,z)) \wedge e(a,v)$

   Forme clausale : $\{\neg e(x,y) \vee \neg e(y,z) \vee \neg e(x,z), e(a,v)\}$

3. $\neg(\neg \forall x P(x) \vee \neg \forall x Q(x) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)))$.

   Forme normale : $(\exists x \neg P(x) \vee \exists x \neg Q(x)) \wedge \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

   Forme propre : $(\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)) \wedge \forall u P(u) \wedge \forall v Q(v)$

   Elimination de $\exists$: $(\neg P(a) \vee \neg Q(b)) \wedge \forall u P(u) \wedge \forall v Q(v)$

   Forme de Skolem : $(\neg P(a) \vee \neg Q(b)) \wedge P(u) \wedge Q(v)$

   Forme clausale : $\{\neg P(a) \vee \neg Q(b), P(u), Q(v)\}$

4. $\forall x((\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x)) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \neg \exists x Q(x))$.

   Forme normale : $\forall x((\forall y \neg P(x,y) \vee \exists x Q(x)) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \forall x \neg Q(x))$

   Forme propre : $\forall x((\forall y \neg P(x,y) \vee \exists z Q(z)) \wedge \exists r P(x,r) \wedge \forall s \neg Q(s))$

   Elimination de $\exists$: $\forall x((\forall y \neg P(x,y) \vee Q(a)) \wedge P(x,f(x)) \wedge \forall s \neg Q(s))$

   Forme de Skolem : $(\neg P(x,y) \vee Q(a)) \wedge P(x,f(x)) \wedge \neg Q(s)$

   Forme clausale : $\{\neg P(x,y) \vee Q(a), P(x,f(x)), \neg Q(s)\}$

5. $\neg(\exists x \forall y \forall z((P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x))))$.
Forme normale : $\forall x \exists y \exists z((\neg P(y) \vee Q(z)) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x))$
Forme propre : idem
Elimination de $\exists$: $\forall x((\neg P(f(x)) \vee Q(g(x))) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x))$
Forme de Skolem : $(\neg P(f(x)) \vee Q(g(x))) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x)$
Forme clausale : $\{\neg P(f(x)) \vee Q(g(x)), P(x), \neg Q(x)\}$

$\square$