Solutions des Exercices de la Séance du 18 mars 2020

Stéphane Devismes

23 mars 2020

Exercice 1 (EXO 73 : Expansion et contre-modèle) *Trouver, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :*

1. $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x Q(x)$.
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$.
4. $(\exists x F(x) \Rightarrow \exists x G(x)) \Rightarrow \forall x(F(x) \Rightarrow G(x))$.
5. $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists x R(x,x)$.
6. $\forall x \forall y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow \forall x R(x,x)$.

Indication *: il suffit de construire des 1 ou 2 expansions.*

Réponse:

1. $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$, construisons la 1-expansion de cette formule :

$$P(0) \Rightarrow P(0).Q(0)$$

Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $P(0) = 1, Q(0) = 0$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0\}$ avec $P_I = \{0\}, Q_I = \{\}$.

2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x Q(x)$, construisons la 1-expansion de cette formule :

$$(P(0) \Rightarrow Q(0)) \Rightarrow Q(0).$$

Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $P(0) = 0, Q(0) = 0$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0\}$ avec $P_I = \{\}, Q_I = \{\}$.

3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$, construisons la 2-expansion de cette formule :

$$(P(0) \Rightarrow Q(0)).(P(1) \Rightarrow Q(1)) \Rightarrow (P(0) + P(1) \Rightarrow Q(0).Q(1))$$

Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $P(0) = 1, P(1) = 0, Q(0) = 1, Q(1) = 0$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0,1\}$ avec $P_I = \{0\}, Q_I = \{0\}$.

4. $(\exists x F(x) \Rightarrow \exists x G(x)) \Rightarrow \forall x(F(x) \Rightarrow G(x))$, construisons la 2-expansion de cette formule :

$$(F(0) + F(1) \Rightarrow G(0) + G(1)) \Rightarrow (F(0) \Rightarrow G(0)).(F(1) \Rightarrow G(1))$$

Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $F(0) = 1, F(1) = 1, G(0) = 0, G(1) = 1$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0,1\}$ avec $F_I = \{0,1\}, G_I = \{1\}$.

5. $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists x R(x,x)$, construisons la 2-expansion de cette formule :

$$(R(0,0) + R(0,1)).(R(1,0) + R(1,1)) \Rightarrow R(0,0) + R(1,1)$$

Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $R(0,0) = 0, R(0,1) = 1, R(1,0) = 1, R(1,1) = 0$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0,1\}$ avec $R_I = \{(0,1),(1,0)\}$.

6. $\forall x \forall y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow \forall x R(x,x)$, construisons la 1-expansion de cette formule :

$$(R(0,0) \Rightarrow R(0,0)) \Rightarrow R(0,0)$$

Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $R(0,0) = 0$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0\}$ avec $R_I = \{\}$.

□

Exercice 2 (EXO 74 : Raisonnement incorrect) *Considérons les hypothèses suivantes :*

1. $\exists x P(x)$.

2. $\exists x Q(x)$.

3. $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow R(x))$.

Montrer, en utilisant la méthode des expansions, qu'il est incorrect de déduire à partir de ces trois hypothèses la conclusion suivante : $\exists x R(x)$.

Réponse: Nous construisons une 2-expansion des hypothèses et de la conclusion.

— Hypothèses :
  1. $P(0)+P(1)$.
  2. $Q(0)+Q(1)$.
  3. $(P(0).Q(0) \Rightarrow R(0)).(P(1).Q(1) \Rightarrow R(1))$.

— Conclusion : $R(0)+R(1)$.

L'assignation $P(0) = 1, P(1) = 0, Q(0) = 0, Q(1) = 1, R(0) = 0, R(1) = 0$ est modèle des expansions des hypothèses et n'est pas modèle de la conclusion. Revenons au premier ordre, l'interprétation I de domaine $\{0,1\}$ avec $P_I = \{0\}, Q_I = \{1\}, R_I = \{\}$ est modèle des hypothèses et contre-modèle de la conclusion. Donc le raisonnement est incorrect.

□

Exercice 3 (EXO 75 : Contre-modèles avec relation) *Construire des contre-modèles des formules suivantes, où F est une relation :*

1. $\forall x \exists y(x = y) \Rightarrow \exists y \forall x(y = x)$.

2. $F(a) \wedge (a \neq b) \Rightarrow \neg F(b)$.

3. $\exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge x \neq y) \Rightarrow \forall x F(x)$.

4. $\forall x \forall y(F(x,y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x F(x,x)$.

Réponse:

1. $\forall x \exists y(x = y) \Rightarrow \exists y \forall x(y = x)$, nous construisons la 2-expansion de cette formule :

$$((0=0)+(0=1)).((1=0)+(1=1)) \Rightarrow (0=0).(0=1)+(1=0).(1=1)$$

En tenant compte du sens de l'égalité, l'expansion vaut 0, donc toute interprétation avec au moins 2 éléments est contre-modèle de la formule.

2. $F(a) \wedge (a \neq b) \Rightarrow \neg F(b)$. Remplaçons a et b par 0 et 1, nous obtenons la formule $F(0) \wedge (0 \neq 1) \Rightarrow \neg F(1)$. En tenant compte du sens de l'égalité, elle se simplifie en $F(0) \Rightarrow \neg F(1)$. L'assignation $F(0) = 1, F(1) = 1$ lui donne la valeur 0. Donc l'interprétation I de domaine $\{0,1\}$ telle que $a_I = 0, b_I = 1, F_I = \{0,1\}$ est contre-modèle de la formule donnée.

3. $\exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge x \neq y) \Rightarrow \forall x F(x)$. La formule « raconte » que s'il a deux éléments (au moins) qui vérifient la propriété F, alors F est toujours vérifiée. Avec cette lecture de la formule, la solution saute aux yeux : Soit I de domaine $\{0,1,2\}$ avec $F_I = \{0,1\}$. L'interprétation I est un contre-modèle de la formule donnée. Par la méthode des expansions, c'est plus long, puisqu'il faudrait construire une 3-expansion, nous laissons au lecteur le soin de calculer cette 3-expansion.

4. $\forall x \forall y (F(x,y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x F(x,x)$, nous construisons la 1-expansion : $(F(0,0) \Rightarrow 0 = 0) \Rightarrow F(0,0)$. En tenant compte du sens de l'égalité, cette formule devient $(F(0,0) \Rightarrow 1) \Rightarrow F(0,0)$. Pour l'assignation $F(0,0) = 0$, elle vaut 0. Donc l'interprétation I de domaine $\{0\}$ avec $F_I = \{\}$ est contre-modèle de la formule.

□

Exercice 4 (EXO 76 : Contre-modèles avec fonction) *Construire, en utilisant la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes, où f est une fonction et P une relation :*

1. $\forall y \exists x (f(x) = y)$.
2. $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.
3. $\exists x \forall y (f(y) = x)$.
4. $\forall x (P(x) \Rightarrow P(f(x)))$.

Réponse:

1. $\forall y \exists x (f(x) = y)$, la 2-expansion est :

$$((f(0) = 0) + (f(1) = 0)).((f(0) = 1) + (f(1) = 1))$$

Il suffit de rendre une des clauses fausses, on choisit arbitrairement le premier. Il n'y a alors pas le choix : $f(0) = f(1) = 1$.

2. $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$, la 2-expansion est :

$$(f(0) = f(0) \Rightarrow 0 = 0).(f(0) = f(1) \Rightarrow 0 = 1).(f(1) = f(0) \Rightarrow 1 = 0).(f(1) = f(1) \Rightarrow 1 = 1)$$

qui se simplifie en $\neg(f(0) = f(1)).\neg(f(1) = f(0))$. On choisit arbitrairement $f(0) = 0$ et alors $f(1) = 0$ nous donne le contre-modèle.

3. $\exists x \forall y (f(y) = x)$, la 2-expansion est :

$$(f(0) = 0).(f(1) = 0) + (f(0) = 1).(f(1) = 1)$$

On choisit arbitrairement $f(0) = 0$, ce qui rend le second monôme faux. Pour rendre le premier faux également, on doit alors prendre $f(1) = 1$.

4. $\forall x (P(x) \Rightarrow P(f(x)))$, la 2-expansion est :

$$(P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1)))$$

Il faut qu'une des deux implications soit fausse, on choisit pour cela $P(0) = 1$ et $P(f(0)) = 0$. Ceci impose que $f(0) \neq 0$ et donc $f(0) = 1$, d'où $P(1) = 0$. La valeur de $f(1)$ est laissée libre.

□

Exercice 5 (EXO 77 : Équivalences) *Prouver que :*

1. $\neg \forall x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x \neg P(y,x)$.
2. $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$.
3. *La phrase « aucun malade n'aime les charlatans » a été traduite en logique du premier ordre par deux étudiants par les 2 formules suivantes :*
— $\forall x \forall y ((M(x) \wedge A(x,y)) \Rightarrow \neg C(y))$.
— $\neg(\exists x (M(x) \wedge (\exists y (A(x,y) \wedge C(y)))))$.
Montrer que ces étudiants disent la même chose, c'est-à-dire les deux formules associées aux traductions sont équivalentes.

Réponse: Les preuves sont une suite de formules « élémentairement » équivalentes accompagnées des équivalences utilisées.

1. $\neg\forall x\exists y P(x,y) \equiv \exists y\forall x\neg P(y,x)$.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \neg\forall x\exists y P(x,y) & \\
(2) & \equiv \exists x\neg\exists y P(x,y) & \text{relation entre les quantificateurs} \\
(3) & \equiv \exists x\forall y\neg P(x,y) & \text{relation entre les quantificateurs} \\
(4) & \equiv \exists y\forall x\neg P(y,x) & \text{par changement de variables liées}
\end{array}$$

2. $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) & \\
(2) & \equiv \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) & \text{élimination de } \Rightarrow \\
(3) & \equiv \exists x\neg P(x) \vee \exists x Q(x) & \text{distributivité de } \exists \text{ sur } \vee \\
(4) & \equiv \neg\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) & \text{équivalence } \exists\neg \text{ et } \neg\forall \\
(5) & \equiv \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x) & \text{ajout de } \Rightarrow
\end{array}$$

3. Nous transformons une formule en l'autre par équivalences successives.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \neg(\exists x(M(x) \wedge (\exists y(A(x,y) \wedge C(y))))) & \\
(2) & \equiv \forall x\neg(M(x) \wedge (\exists y(A(x,y) \wedge C(y)))) & \neg\exists = \forall\neg \\
(3) & \equiv \forall x(\neg M(x) \vee \neg(\exists y(A(x,y) \wedge C(y)))) & \text{identité de De Morgan} \\
(4) & \equiv \forall x(\neg M(x) \vee \forall y(\neg(A(x,y) \wedge C(y)))) & \neg\exists = \forall\neg \\
(5) & \equiv \forall x\forall y(\neg M(x) \vee (\neg(A(x,y) \wedge C(y)))) & \text{déplacement } \forall \\
(6) & \equiv \forall x\forall y(\neg M(x) \vee (\neg A(x,y) \vee \neg C(y))) & \text{identité de De Morgan} \\
(7) & \equiv \forall x\forall y((\neg M(x) \vee \neg A(x,y)) \vee \neg C(y)) & \text{associativité de } \vee \\
(8) & \equiv \forall x\forall y(\neg(M(x) \wedge A(x,y)) \vee \neg C(y)) & \text{identité de De Morgan} \\
(9) & \equiv \forall x\forall y((M(x) \wedge A(x,y)) \Rightarrow \neg C(y)) & \text{identité propositionnelle}
\end{array}$$

$\square$

Exercice 6 (EXO 78 : , Preuve,*) *Prouver les deux équivalences suivantes :*

— $\neg\exists x A \equiv \forall x\neg A$.

— $\exists x A \equiv \neg\forall x\neg A$.

Réponse:

— $\neg\exists x A \equiv \forall x\neg A$

$$\begin{array}{ll}
\neg\exists x A & \\
\equiv \neg\exists x\neg\neg A & \text{identité de la double négation} \\
\equiv \forall x\neg A &
\end{array}$$

— $\exists x A \equiv \neg\forall x\neg A$

$$\begin{array}{ll}
\exists x A & \\
\equiv \exists x\neg\neg A & \text{identité de la double négation} \\
\equiv \neg\forall x\neg A &
\end{array}$$

$\square$

Exercice 7 (EXO 79 : Preuve) *Nous savons que $(\forall x(A \wedge B)) \equiv (A \wedge (\forall x B))$ à la condition que x ne soit pas une variable libre de A. Montrer que cette condition est nécessaire en donnant une assignation qui donne des valeurs différentes aux deux formules $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ et $P(x) \wedge (\forall x Q(x))$.*

Réponse: Soient I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $P_I = \{0\}$, $Q_I = \{0,1\}$ et e un état des variables avec $e(x) = 0$. Il est clair que l'assignation (I,e) donne la valeur 0 à la première formule et 1 à la deuxième.

$\square$