Solutions des Exercices de la Séance du 18 mars 2020

Stéphane Devismes

17 mars 2020

Exercice 1 (EXO 64 : Structure et variables libres)
Pour chaque formule ci-dessous, indiquer sa structure et ses variables libres.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(x,y))$.
2. $\forall a \forall b(b \neq 0 \Rightarrow \exists q \exists r(a = b * q + r \wedge r < b))$ [1].
3. $Pair(x) \Leftrightarrow \exists y(x = 2 * y)$.
4. $x\ Divise\ y \Leftrightarrow \exists z(y = z * x)$.
5. $Premier(x) \Leftrightarrow \forall y(y\ Divise\ x \Rightarrow y = 1 \vee y = x)$.

Réponse: Nous donnons les structures grâce à la syntaxe des formules sans priorité :

1. La formule $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(x,y))$ ne contient pas de variable libre.
2. La structure de la formule $\forall a \forall b(b \neq 0 \Rightarrow \exists q \exists r(a = b * q + r \wedge r < b))$ est
$$\forall a \forall b(\neq (b,0) \Rightarrow \exists q \exists r(= (a, +(*(b,q),r)) \wedge < (r,b)))$$
Cette formule ne contient pas de variable libre.
3. La structure de la formule $Pair(x) \Leftrightarrow \exists y(x = 2 * y)$ est $(Pair(x) \Leftrightarrow \exists y = (x, *(2,y)))$, et x est une variable libre.
4. La structure de la formule $x\ Divise\ y \Leftrightarrow \exists z(y = z * x)$ est $(Divise(x,y) \Leftrightarrow \exists z = (y, *(z,x)))$, et x et y sont des variables libres.
5. La structure de la fonction $Premier(x) \Leftrightarrow \forall y(y\ Divise\ x \Rightarrow y = 1 \vee y = x)$ est
$$(Premier(x) \Leftrightarrow \forall y(Divise(y,x) \Rightarrow (= (y,1) \vee = (y,x))))$$
et x est une variable libre.

□

Exercice 2 (EXO 65 : Formalisation, symbole de fonction et de relation) *Nous considérons $\Sigma = \{f^{r2}, o^{r2}, c^{r2}, j^{r2}, r^{f0}, p^{f1}\}$ la signature ayant la sémantique donnée ci-dessous.*

— $f(x,y)$: *x est frère de y.*
— $o(x,y)$: *x est l'oncle de y.*
— $c(x,y)$: *x est le cousin de y.*
— $j(x,y)$: *x est plus jeune que y.*
— *r est le diminutif de Robert.*
— $p(x)$ *est le père de x.*

Exprimer en logique du premier ordre et en utilisant la signature Σ les phrases suivantes :

1. *Tout frère du père de Robert est un oncle de Robert.*
2. *Si les pères de deux enfants sont des frères alors ces deux enfants sont des cousins.*
3. *Robert a un cousin plus jeune qu'un des frères de Robert.*

1. Afin de respecter la notation usuelle pour la division euclidienne nous prenons exceptionnellement a, b, q et r comme nom de variable.

Exprimer en français les propositions logiques suivantes :

1. $\nexists x\ j(p(x), x)$
2. $\forall x \forall y (p(p(x)) = p(p(y)) \Rightarrow c(x, y))$
3. $\forall x \exists y (f(x, y) \wedge j(x, y))$
4. $\exists x \exists y (f(x, y) \wedge \neg(p(x) = p(y)))$

Réponse:

1. Tout frère du père de Robert est un oncle de Robert :
$$\forall x (f(x, p(r)) \Rightarrow o(x, r)).$$
2. Si les pères de deux enfants sont des frères alors ces deux enfants sont des cousins :
$$\forall x \forall y (f(p(x), p(y)) \Rightarrow c(x, y)).$$
3. Robert a un cousin plus jeune qu'un des frères de Robert :
$$\exists x (c(x, r) \wedge \exists y (f(y, r) \wedge j(x, y))).$$

1. $\nexists x\ j(p(x), x)$: personne n'est plus âgé que son père
2. $\forall x \forall y (p(p(x)) = p(p(y)) \Rightarrow c(x, y))$: deux personnes qui ont le même grand-père paternel sont cousines
3. $\forall x \exists y (f(x, y) \wedge j(x, y))$: tout le monde a un frère aîné (impossible mais ça n'empêche pas de l'exprimer...)
4. $\exists x \exists y (f(x, y) \wedge \neg(p(x) = p(y)))$: il y a deux frères qui n'ont pas le même père

□

Exercice 3 (Exo 66 : Formalisation) *Considérons la signature $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f0}, J^{r2}, G^{r2}\}$, où les symboles ont le sens donné ci-dessous.*

— a : *l'équipe d'Allemagne.*
— f : *l'équipe de France.*
— $J(x, y)$: *x a joué un match contre y.*
— $G(x, y)$: *x a gagné contre y.*

Exprimer en logique du premier ordre en utilisant la signature Σ les assertions suivantes :

1. *L'équipe de France a gagné un match et en a perdu un.*
2. *L'équipe de France et l'équipe d'Allemagne ont fait match nul.*
3. *Une équipe a gagné tous ses matchs.*
4. *Aucune équipe n'a perdu tous ses matchs.*
5. *Considérons l'assertion suivante : « Tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs, ont gagné au moins un match ». Parmi les formules suivantes, lesquelles expriment la phrase ci-dessus, et lesquelles sont équivalentes ?*
   (a) $\forall x \exists y (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (b) $\forall x (\exists y (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z))) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (c) $\exists x (\forall y (J(x, y) \Rightarrow G(x, y)) \Rightarrow \forall z (J(x, z) \Rightarrow \exists v G(x, v)))$.
   (d) $\forall x \forall y (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (e) $\forall x (\forall y (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z))) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.

Réponse:

1. L'équipe de France a gagné un match et en a perdu un :
$$\exists x\, G(f, x) \wedge \exists x\, G(x, f).$$

2. L'équipe de France et l'équipe d'Allemagne ont fait match nul :

$$J(f,a) \wedge \neg G(f,a) \wedge \neg G(a,f).$$

3. Une équipe a gagné tous ses matchs :

$$\exists x(\forall y(J(x,y) \Rightarrow G(x,y))).$$

4. Aucune équipe n'a perdu tous ses matchs :

$$\neg(\exists x(\forall y(J(x,y) \Rightarrow G(y,x)))).$$

5. Les deux formules ci-dessous sont équivalentes et expriment la phrase :

Tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs, ont gagné au moins un match.

$$\forall x(\exists y\, (J(x,y) \wedge \forall z(J(y,z) \Rightarrow G(y,z))) \Rightarrow \exists v G(x,v))$$

$$\forall x \forall y\, (J(x,y) \wedge \forall z(J(y,z) \Rightarrow G(y,z)) \Rightarrow \exists v G(x,v))$$

En réécrivant les formules selon : $\forall x(A \Rightarrow B) \equiv \exists x A \Rightarrow B$ si x n'apparait pas dans B, la solution devient évidente.

□

Exercice 4 (EXO 68 : Évaluer des prédicats unaires) *Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0,1\}$ telle que $P_I = \{0\}, Q_I = \{1\}$.*

1. *Évaluer dans cette interprétation les formules $\forall x P(x)$ et $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.*
2. *Les formules $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ et $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ sont-elles équivalentes ?*
3. *Évaluer dans cette interprétation les formules $\exists x P(x)$ et $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.*
4. *Les formules $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ et $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ sont-elles équivalentes ?*
5. *Évaluer dans cette interprétation les formules $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ et $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)$.*
6. *Les deux formules $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ et $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)$ sont-elles équivalentes ?*

Réponse: Soit I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ telle que $P_I = \{0\}, Q_I = \{1\}$. Dans cette interprétation, nous avons :

1. $\forall x P(x) = 0, \forall x(P(x) \vee Q(x)) = 1$.
2. Les formules $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ et $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ ne sont pas équivalentes, car nous avons dans I : $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = 0$ et $\forall x(P(x) \vee Q(x)) = 1$.
3. $\exists x P(x) = 1, \exists x(P(x) \wedge Q(x)) = 0$.
4. Les formules $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ et $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ne sont pas équivalentes, car nous avons dans I : $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) = 1$ et $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) = 0$
5. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) = 0$ et $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x) = 1$.
6. Donc les deux formules ne sont pas équivalentes.

□

Exercice 5 (EXO 70 : Prédicat unaire et égalité) *Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0,1,2\}$ telle que : $P_I = \{0,1\}, Q_I = \{1,2\}, R_I = \{\}$. Évaluer dans cette interprétation les formules suivantes :*

1. $\exists x R(x)$.
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$.
4. $\forall x(R(x) \Rightarrow Q(x))$.

5. *$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$* [2].
6. *$\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow x = y))$.*

Réponse: Soit I l'interprétation de domaine $\{0,1,2\}$ telle que $P_I = \{0,1\}, Q_I = \{1,2\}, R_I = \{\}$. Dans cette interprétation, nous avons :

1. $\exists x R(x) = 0$.
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) = 1$.
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) = 0$.
4. $\forall x(R(x) \Rightarrow Q(x)) = 1$.
5. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) = 0$.
6. $\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow x = y)) = 1$.

□

Exercice 6 (EXO 71 : Évaluation, égalité) *Nous utilisons le symbole de fonction unaire f et la constante a. Nous abrégeons $\neg(x = y)$ en $x \neq y$. Soient I_1, I_2 les interprétations suivantes de domaine $\{0,1,2\}$: $a_{I_1} = a_{I_2} = 0$.*

x	$f_{I_1}(x)$	$f_{I_2}(x)$
0	*0*	*1*
1	*0*	*2*
2	*2*	*0*

Dans l'interprétation I_1 puis dans I_2, évaluer les formules suivantes :

1. *$f(a) = a$.*
2. *$f(f(a)) = a$.*
3. *$f(f(f(a)) = a$.*
4. *$\exists x(f(x) = x)$, f a un point-fixe.*
5. *$\forall x(f(f(f(x))) = x)$.*
6. *$\forall y \exists x(f(x) = y)$, f est surjective.*
7. *$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$, f est injective.*
8. *$\neg(\exists x \exists y(f(x) = f(y) \wedge x \neq y))$.*

Réponse:

formules	valeur dans I_1	valeur dans I_2
$f(a) = a$	1	0
$f(f(a)) = a$	1	0
$f(f(f(a)) = a$	1	1
$\exists x(f(x) = x)$	1	0
$\forall x(f(f(f(x))) = x)$	0	1
$\forall y \exists x(f(x) = y)$	0	1
$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$	0	1
$\neg \exists x \exists y(f(x) = f(y) \wedge x \neq y)$	0	1

□

Exercice 7 (EXO 72 : Formalisation et évaluation) *Nous adoptons les notations suivantes :*

- *Anatoli, Boris, Catarina et Denka sont des constantes du domaine,*
- *$P(x)$ signifie que x a réussi son examen,*

2. Cette formule signifie qu'il y a un et un seul élément vérifiant P.

— *$Q(x,y)$ signifie que x a téléphoné à y.*

Donner la signature associée à ces notations et traduire en formules les énoncés suivants :

1. *Quelqu'un a raté l'examen et n'a été appelé par personne.*
2. *Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont été appelés.*
3. *Personne n'a appelé tous ceux qui ont réussi à l'examen.*
4. *Tous ceux qui ont appelé quelqu'un, ont appelé quelqu'un qui a réussi l'examen.*

Soit l'interprétation ayant pour domaine $D = \{0,1,2,3\}$. Anatoli, Boris, Catarina et Denka valent respectivement 0, 1, 2 et 3 dans l'interprétation. Anatoli et Boris sont des garçons et Catarina et Denka sont des filles. Dans cette interprétation seuls Boris et Catarina ont réussi l'examen, les garçons ont appelé les filles, Denka a appelé Boris, Catarina a appelé Denka et ce sont les seuls appels.

Nous demandons de définir formellement l'interprétation donnée ci-dessus, puis de donner la valeur des énoncés précédents dans cette interprétation.

Indication *: pour faciliter le calcul de la valeur, nous suggérons de dessiner l'interprétation en entourant les prénoms des personnes qui ont réussi leurs examens, et en mettant une flèche de x vers y si x a téléphoné à y.*

Réponse: La signature est la suivante $\Sigma = \{Anatoli^{f0}, Boris^{f0}, Catarina^{f0}, Denka^{f0}, P^{r1}, Q^{r2}\}$. L'interprétation donnée dans l'énoncé se définit formellement comme l'interprétation I sur Σ de domaine $D = \{0,1,2,3\}$ telle que :

— $Anatoli_I^{f0} = 0$, $Boris_I^{f0} = 1$, $Catarina_I^{f0} = 2$, $Denka_I^{f0} = 3$,

— $P_I^{r1} = \{1,2\}$ et

— $Q_I^{r2} = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3)\}$.

Formules	valeurs dans l'interprétation I
$\exists x(\neg P(x) \wedge \forall y \neg Q(y,x))$	1
$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y,x))$	1
$\neg \exists x \forall y(P(y) \Rightarrow Q(x,y))$	1
$\forall x(\exists y Q(x,y) \Rightarrow \exists z(Q(x,z) \wedge P(z)))$	0

$\square$