Nom :
Prénom :

Quick INF242 : formules du premier ordre

30 min

Le sujet est recto-verso, vous répondez directement sur la feuille.

Pour tout ce sujet, on considère la signature $\Sigma = \{G^{r1}, O^{r2}, A^{r2}, s^{f0}, m^{f0}\}$ où :
— $G(x)$ signifie « x est guéri »
— $O(x, y)$ signifie « x a opéré y »
— $A(x, y)$ signifie « x est amoureux de y »
— s désigne le docteur Shepherd et m désigne Meredith.
On pourra également utiliser le symbole d'égalité $=$.

Exercice 1 (Formalisation) *Traduire les affirmations suivantes en logique du premier ordre :*

1. *Certains patients ont été opérés par le docteur Shepherd et aussi par Meredith.*
2. *Tous les patients que le docteur Shepherd a opérés sont ou bien guéris, ou bien amoureux de lui, mais pas les deux.*
3. *Meredith n'a été opérée par personne et pourtant elle a guéri.*
4. *Tous les docteurs qui ont opéré un patient qui a guéri, ont guéri tous les patients qu'ils ont opérés.*
5. *Meredith est amoureuse de deux personnes, ni plus ni moins.*

:

1. Certains patients ont été opérés par le docteur Shepherd et aussi par Meredith.
   $\exists x(O(s, x) \wedge O(m, x))$
2. Tous les patients que le docteur Shepherd a opérés sont ou bien guéris, ou bien amoureux de lui, mais pas les deux.
   $\forall x(O(s, x) \Rightarrow (G(x) \Leftrightarrow \neg A(x, s)))$
3. Meredith n'a été opérée par personne et pourtant elle a guéri.
   $\forall x \neg O(x, m) \wedge G(m)$
4. Tous les docteurs qui ont opéré un patient qui a guéri, ont guéri tous les patients qu'ils ont opérés.
   $\forall x(\exists y(O(x, y) \wedge G(y)) \Rightarrow \forall z(O(x, z) \Rightarrow G(z)))$
5. Meredith aime deux personnes, ni plus ni moins.
   $\exists x \exists y(A(m, x) \wedge A(m, y) \wedge x \neq y \wedge \forall z(A(m, z) \Rightarrow x = z \vee y = z))$

$\square$

Exercice 2 (Expansion) *Construire un contre-modèle de chacune des formules suivantes par la méthode des expansions :*

1. $\forall x \forall y (G(x) \land G(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\forall x (\exists y O(y, x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow \forall z G(z)$
3. $\forall x \neg A(x, x) \Rightarrow \forall x \forall y (A(x, y) \Rightarrow A(y, x))$

:

1. $G(0) \Rightarrow 0 = 0$ valide
   $(G(0) \land G(0) \Rightarrow 0 = 0).(G(0) \land G(1) \Rightarrow 0 = 1).(G(1) \land G(0) \Rightarrow 1 = 0).(G(1) \land G(1) \Rightarrow 1 = 1)$
   $\equiv \neg(G(0) \land G(1))$ c-m pour $G_I = \{0, 1\}$
2. $(O(0, 0) \Rightarrow G(0)) \Rightarrow G(0)$ c-m pour $G_I = \emptyset$ et $O_I = \emptyset$
3. $\neg A(0, 0) \Rightarrow (A(0, 0) \Rightarrow A(0, 0))$ valide (car $A(0, 0) \Rightarrow A(0, 0)$ valide)
   $\overline{A(0, 0)}.\overline{A(1, 1)} \Rightarrow (A(0, 0) \Rightarrow A(0, 0)).(A(0, 1) \Rightarrow A(1, 0)).(A(1, 0) \Rightarrow A(0, 1)).(A(1, 1) \Rightarrow A(1, 1))$
   $\equiv \overline{A(0, 0)}.\overline{A(1, 1)} \Rightarrow (A(0, 1) \Leftrightarrow A(1, 0))$
   c-m $A_I = \{(0, 1)\}$ ou bien $A_I = \{(1, 0)\}$.

□

Exercice 3 (Équivalence) *Dans chacun des cas suivants, montrer que les deux formules données sont équivalentes en détaillant les calculs et en justifiant les étapes qui le nécessitent :*

1. $\forall x \forall y (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) \ \equiv \ \neg \exists y \exists x (O(x, y) \land O(y, x))$
2. $\forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) \ \equiv \ \forall x \forall y (O(y, x) \Rightarrow G(x)) \land \forall x \exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x))$

:

1. $\forall x \forall y (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) \ \equiv \ \neg \exists y \exists x (O(x, y) \land O(y, x))$

   $$\begin{aligned}
   \forall x \forall y (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) &\equiv \forall y \forall x (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) \\
   \forall x \forall y (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) &\equiv \neg\neg \forall y \forall x (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) \\
   \forall x \forall y (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) &\equiv \neg \exists y \neg \forall x (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) \\
   \forall x \forall y (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) &\equiv \neg \exists y \exists x \neg (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) \\
   \forall x \forall y (\neg O(x, y) \lor \neg O(y, x)) &\equiv \neg \exists y \exists x (O(x, y) \land O(y, x))
   \end{aligned}$$

2. $\forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) \ \equiv \ \forall x \forall y (O(y, x) \Rightarrow G(x)) \land \forall x \exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x))$

   $$\begin{aligned}
   \forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) &\equiv \forall x ((G(x) \Rightarrow \exists y O(y, x)) \land (\exists y O(y, x) \Rightarrow G(x))) \\
   \forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) &\equiv \forall x (\exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x)) \land (\neg \exists y O(y, x) \lor G(x))) \\
   \forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) &\equiv \forall x (\exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x)) \land (\forall y \neg O(y, x) \lor G(x))) \\
   \forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) &\equiv \forall x (\exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x)) \land \forall y (\neg O(y, x) \lor G(x))) \\
   \forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) &\equiv \forall x (\exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x)) \land \forall y (O(y, x) \Rightarrow G(x))) \\
   \forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) &\equiv \forall x (\forall y (O(y, x) \Rightarrow G(x)) \land \exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x))) \\
   \forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y, x)) &\equiv \forall x \forall y (O(y, x) \Rightarrow G(x)) \land \forall x \exists y (G(x) \Rightarrow O(y, x))
   \end{aligned}$$

□