Nom :
Prénom :

Quick INF242 : formules du premier ordre

30 min

Le sujet est recto-verso, vous répondez directement sur la feuille.

Pour tout ce sujet, on considère la signature $\Sigma = \{G^{r1}, O^{r2}, A^{r2}, s^{f0}, m^{f0}\}$ où :
- $G(x)$ signifie « x est guéri »
- $O(x, y)$ signifie « x a opéré y »
- $A(x, y)$ signifie « x est amoureux de y »
- s désigne le docteur Shepherd et m désigne Meredith.

On pourra également utiliser le symbole d'égalité $=$.

Exercice 1 (Formalisation) *Traduire les affirmations suivantes en logique du premier ordre :*

1. *Certains patients ont été opérés par le docteur Shepherd et aussi par Meredith.*
2. *Tous les patients que le docteur Shepherd a opérés sont ou bien guéris, ou bien amoureux de lui, mais pas les deux.*
3. *Meredith n'a été opérée par personne et pourtant elle a guéri.*
4. *Tous les docteurs qui ont opéré un patient qui a guéri, ont guéri tous les patients qu'ils ont opérés.*
5. *Meredith est amoureuse de deux personnes, ni plus ni moins.*

$\square$

Exercice 2 (Expansion) *Construire un contre-modèle de chacune des formules suivantes par la méthode des expansions :*

1. $\forall x \forall y (G(x) \wedge G(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\forall x (\exists y O(y,x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow \forall z G(z)$
3. $\forall x \neg A(x,x) \Rightarrow \forall x \forall y (A(x,y) \Rightarrow A(y,x))$

$\square$

Exercice 3 (Équivalence) *Dans chacun des cas suivants, montrer que les deux formules données sont équivalentes en détaillant les calculs et en justifiant les étapes qui le nécessitent :*

1. $\forall x \forall y (\neg O(x,y) \vee \neg O(y,x)) \ \equiv \ \neg \exists y \exists x (O(x,y) \wedge O(y,x))$
2. $\forall x (G(x) \Leftrightarrow \exists y O(y,x)) \ \equiv \ \forall x \forall y (O(y,x) \Rightarrow G(x)) \wedge \forall x \exists y (G(x) \Rightarrow O(y,x))$

$\square$