Interrogation 5

Stéphane Devismes

Exercise 1
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre :

1. $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \neg\forall x P(x)$
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)))$
3. $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$
4. $\forall x \forall y(\exists z(x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y))$
5. $\exists z \forall x P(z, x) \Rightarrow \forall x \exists z P(z, x)$

Answer:

1. $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \neg\forall x P(x)$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists x Q(x)$	
1,2	2	Supposons $\forall x P(x)$	
1,2	3	$\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	$\wedge$E1 1
1,2	4	$\neg\exists x Q(x)$	$\wedge$E2 1
1,2,5	5	Supposons $P(x) \Rightarrow Q(x)$	
1,2,5	6	$P(x)$	$\forall$E 2,x
1,2,5	7	$Q(x)$	$\Rightarrow$E 5,6
1,2,5	8	$\exists x Q(x)$	$\exists$I 7,x
1,2,5	9	$\perp$	$\Rightarrow$E 4,8
1,2	10	Donc $(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow$I 5,9
1,2	11	$\perp$	$\exists$E 3,10
1	12	Donc $\neg\forall x P(x)$	$\Rightarrow$I 2,11
	13	Donc $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \neg\forall x P(x)$	$\Rightarrow$I 1,12

2. $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)))$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $P(x)$	
1,2	2	Supposons $\neg P(y)$	
1,2,3	3	Supposons $x = y$	
1,2,3	4	$P(y)$	congruence 3,1
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow$E 2,4
1,2	6	Donc $\neg(x = y)$	$\Rightarrow$I 3,5
1	7	Donc $\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)$	$\Rightarrow$I 2,6
1	8	$\forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y))$	$\forall$I 7
	9	Donc $P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y))$	$\Rightarrow$I 1,8
	10	$\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)))$	$\forall$I 9

3. $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$	
1,2	2	`Supposons` $P(x) \wedge \neg P(x)$	
1,2	3	$P(x)$	$\wedge$E1 2
1,2	4	$\neg P(x)$	$\wedge$E2 2
1,2	5	$\perp$	$\Rightarrow$E 3,4
1,2	6	$\forall x P(x)$	Efq
1	7	`Donc` $(P(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$	$\Rightarrow$I 2,6
1	8	$\forall x P(x)$	$\exists$E 7
	9	`Donc` $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$	$\Rightarrow$I 1,8

4. $\forall x \forall y(\exists z(x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y))$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists z(x = z \wedge z = y)$	
1,2	2	`Supposons` $(x = z \wedge z = y)$	
1,2	3	$x = z$	$\wedge$E1 2
1,2	4	$z = y$	$\wedge$E2 2
1,2	5	$x = y$	congruence 4,3
1	6	`Donc` $(x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y)$	$\Rightarrow$I 2,5
1	7	$x = y$	$\exists$E 1,6
	8	`Donc` $\exists z(x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y)$	$\Rightarrow$I 1,7
	9	$\forall y(\exists z(x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y))$	$\forall$I 8
	10	$\forall x \forall y(\exists z(x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y))$	$\forall$I 9

5. $\exists z \forall x P(z, x) \Rightarrow \forall x \exists z P(z, x)$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists z \forall x P(z, x)$	
1,2	2	`Supposons` $\forall x P(z, x)$	
1,2	3	$P(z, u)$	$\forall$E 2, u
1,2	4	$\exists z P(z, u)$	$\exists$I 3, z
1,2	5	$\forall u \exists z P(z, u)$	$\forall$I 4
1,2	6	$\forall x \exists z P(z, x)$	copie de 5
1	7	$\forall x P(z, x) \Rightarrow \forall x \exists z P(z, x)$	$\Rightarrow$I 2,6
1	8	$\forall x \exists z P(z, x)$	$\exists$E 1,7
	9	$\exists z \forall x P(z, x) \Rightarrow \forall x \exists z P(z, x)$	$\Rightarrow$I 1,8

$\square$