

Base de la démonstration automatique : Théorème de Herbrand

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Grenoble Alpes

31 Mars 2011

Plan

Introduction

Domaine et base de Herbrand

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Plan

Introduction

Domaine et base de Herbrand

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Introduction

Rappel : En logique du premier ordre, il n'y a pas d'algorithme pour **décider** si une formule est valide ou non valide.

Introduction

Rappel : En logique du premier ordre, il n'y a pas d'algorithme pour **décider** si une formule est valide ou non valide.

Programme **semi-décidable** :

1. S'il termine alors il **décide correctement** si la formule est valide ou non.
Lorsque la formule est valide, la décision est généralement accompagnée d'une preuve.
2. Si la formule est valide, alors il termine. Cependant, l'exécution peut être longue !

Introduction

Rappel : En logique du premier ordre, il n'y a pas d'algorithme pour **décider** si une formule est valide ou non valide.

Programme **semi-décidable** :

1. S'il termine alors il **décide correctement** si la formule est valide ou non.
Lorsque la formule est valide, la décision est généralement accompagnée d'une preuve.
2. Si la formule est valide, alors il termine. Cependant, l'exécution peut être longue !

Notons que **si la formule n'est pas valide, la terminaison de ce programme n'est pas garantie.**

Introduction

Rappel : En logique du premier ordre, il n'y a pas d'algorithme pour **décider** si une formule est valide ou non valide.

Programme **semi-décidable** :

1. S'il termine alors il **décide correctement** si la formule est valide ou non.
Lorsque la formule est valide, la décision est généralement accompagnée d'une preuve.
2. Si la formule est valide, alors il termine. Cependant, l'exécution peut être longue !

Notons que **si la formule n'est pas valide, la terminaison de ce programme n'est pas garantie.**

Nous étudions maintenant un tel programme.

Plan

Introduction

Domaine et base de Herbrand

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Fermeture universelle

Définition 5.1.1

Soit C une formule ayant pour variables libres x_1, \dots, x_n .

La **fermeture universelle** de C , notée $\forall(C)$, est la formule $\forall x_1 \dots \forall x_n C$.

Cette notion est définie à l'ordre près des variables libres de C .

Soit Γ un ensemble de formules, $\forall(\Gamma) = \{\forall(A) \mid A \in \Gamma\}$.

Fermeture universelle

Définition 5.1.1

Soit C une formule ayant pour variables libres x_1, \dots, x_n .

La **fermeture universelle** de C , notée $\forall(C)$, est la formule $\forall x_1 \dots \forall x_n C$.

Cette notion est définie à l'ordre près des variables libres de C .

Soit Γ un ensemble de formules, $\forall(\Gamma) = \{\forall(A) \mid A \in \Gamma\}$.

Exemple 5.1.2

$\forall(P(x) \wedge R(x, y)) =$

Fermeture universelle

Définition 5.1.1

Soit C une formule ayant pour variables libres x_1, \dots, x_n .

La **fermeture universelle** de C , notée $\forall(C)$, est la formule $\forall x_1 \dots \forall x_n C$.

Cette notion est définie à l'ordre près des variables libres de C .

Soit Γ un ensemble de formules, $\forall(\Gamma) = \{\forall(A) \mid A \in \Gamma\}$.

Exemple 5.1.2

$\forall(P(x) \wedge R(x, y)) =$

$\forall x \forall y (P(x) \wedge R(x, y))$ ou $\forall y \forall x (P(x) \wedge R(x, y))$

Généralisation de la substitution

Définition 5.1.3

Une **substitution** est une application des variables dans les termes.

Soient A une formule et σ une substitution.

$A\sigma$ est la formule obtenue en remplaçant toute occurrence libre d'une variable par son image dans l'application.

La formule $A\sigma$ est une **instance** de A .

Hypothèses

Nous considérons que

- ▶ des formules qui ne contiennent ni le symbole égal, ni les constantes propositionnelles \top et \perp , **car leur sens est fixé dans toute interprétation**
- ▶ **toute signature comporte au moins une constante.**

Quitte à ajouter **la constante *a***.

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. Le domaine de Herbrand pour Σ est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. **Le domaine de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Remarque : cet ensemble n'est jamais vide, car $a \in D_\Sigma$.

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. **Le domaine de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Remarque : cet ensemble n'est jamais vide, car $a \in D_\Sigma$.

2. **La base de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des formules atomiques fermées de cette signature, notée B_Σ .

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. Le **domaine de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Remarque : cet ensemble n'est jamais vide, car $a \in D_\Sigma$.

2. La **base de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des formules atomiques fermées de cette signature, notée B_Σ .

Définition 4.3.8 (Rappel)

- ▶ Un **terme** sur Σ est : soit une variable, soit une constante s où $s^{f_0} \in \Sigma$, soit un terme de la forme $s(t_1, \dots, t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{f_n} \in \Sigma$ et où t_1, \dots, t_n sont des termes sur Σ .
- ▶ Une **formule atomique** sur Σ est : soit une des constantes \top, \perp , soit une variable propositionnelle s où $s^{r_0} \in \Sigma$, soit de la forme $s(t_1, \dots, t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{r_n} \in \Sigma$ et où t_1, \dots, t_n sont des termes sur Σ .

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, Pr^1, Qr^1\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

$$\{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

$\{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$.

2. Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B_\Sigma =$

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

$$\{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

2. Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B_\Sigma =$

$$\{P(f^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Plan

Introduction

Domaine et base de Herbrand

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma, E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature, il vaut lui-même dans cette interprétation.

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature, il vaut lui-même dans cette interprétation.
2. Si s est un symbole de fonction à $n \geq 1$ arguments de la signature et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors $s_{H_{\Sigma,E}}^{fn}(t_1, \dots, t_n) = s(t_1, \dots, t_n)$.

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature, il vaut lui-même dans cette interprétation.
2. Si s est un symbole de fonction à $n \geq 1$ arguments de la signature et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors
$$s_{H_{\Sigma,E}}^{fn}(t_1, \dots, t_n) = s(t_1, \dots, t_n).$$
3. Si le symbole s est une variable propositionnelle, il vaut 1, autrement dit il est vrai, si et seulement si $s \in E$.

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'**interprétation de Herbrand** $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature, il vaut lui-même dans cette interprétation.
2. Si s est un symbole de fonction à $n \geq 1$ arguments de la signature et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors

$$s_{H_{\Sigma,E}}^{fn}(t_1, \dots, t_n) = s(t_1, \dots, t_n).$$
3. Si le symbole s est une variable propositionnelle, il vaut 1, autrement dit il est vrai, si et seulement si $s \in E$.
4. Si s est un symbole de relation de la signature à $n \geq 1$ arguments et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors

$$s_{H_{\Sigma,E}}^{rn} = \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma \wedge s(t_1, \dots, t_n) \in E\}.$$

Propriété de l'interprétation de Herbrand

Propriété 5.1.7

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. Dans l'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$:

1. La valeur d'un terme sans variable est **lui-même**

Propriété de l'interprétation de Herbrand

Propriété 5.1.7

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_{\Sigma}$. Dans l'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma, E}$:

1. La valeur d'un terme sans variable est **lui-même**
2. L'interprétation est modèle d'une formule atomique fermée si et seulement si elle est **élément de E** .

La preuve est une conséquence directe de la définition d'une interprétation de Herbrand.

Propriété de l'interprétation de Herbrand

Propriété 5.1.7

Soient Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. Dans l'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$:

1. La valeur d'un terme sans variable est **lui-même**
2. L'interprétation est modèle d'une formule atomique fermée si et seulement si elle est **élément de E** .

La preuve est une conséquence directe de la définition d'une interprétation de Herbrand.

Notons ici, avec un exemple, pourquoi on a supposé que les formules ne contiennent pas les symboles de relation $\top, \perp, =$, dont le sens est fixé dans toutes les interprétations.

Supposons au contraire que \top soit élément de la base mais non élément de E .

D'après le point 2, l'interprétation $H_{\Sigma,E}$ donnerait \top la valeur 0, alors que \top vaut 1

Exemple 5.1.8

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$

L'ensemble $E = \{P(b), Q(a)\}$ définit l'interprétation de Herbrand H de domaine $D_\Sigma = \{a, b\}$ où :

Exemple 5.1.8

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$

L'ensemble $E = \{P(b), Q(a)\}$ définit l'interprétation de Herbrand H de domaine $D_\Sigma = \{a, b\}$ où :

- ▶ les constantes a et b ont pour valeur elles-mêmes et
- ▶ $P_H = \{b\}$ et $Q_H = \{a\}$.

Formule universelle et modèle de Herbrand

Théorème 5.1.16

Soit Γ un ensemble de formules sans quantificateur sur la signature Σ .

$\forall(\Gamma)$ a un modèle si et seulement si $\forall(\Gamma)$ a un modèle qui est une interprétation de Herbrand de Σ .

Preuve.

Cf. Poly □

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$

L'ensemble $E = \{P(b), Q(a)\}$ définit l'interprétation de Herbrand H de domaine $D_\Sigma = \{a, b\}$ où :

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$

L'ensemble $E = \{P(b), Q(a)\}$ définit l'interprétation de Herbrand H de domaine $D_\Sigma = \{a, b\}$ où :

- ▶ les constantes a et b ont pour valeur elles-mêmes et
- ▶ $P_H = \{b\}$ et $Q_H = \{a\}$.

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$

L'ensemble $E = \{P(b), Q(a)\}$ définit l'interprétation de Herbrand H de domaine $D_\Sigma = \{a, b\}$ où :

- ▶ les constantes a et b ont pour valeur elles-mêmes et
- ▶ $P_H = \{b\}$ et $Q_H = \{a\}$.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ où :

- ▶ $a_I = 0, b_I = 1,$
- ▶ $P_I = \{1\}$ et $Q_I = \{0\}$.

I est modèle de $\forall(\Gamma)$, où Γ est un ensemble de formules sans quantificateur sur la signature Σ , ssi H est un modèle de Herbrand de $\forall(\Gamma)$

Plan

Introduction

Domaine et base de Herbrand

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Théorème de Herbrand

Théorème 5.1.17

Soit Γ un ensemble de formules sans quantificateur de signature Σ .

$\forall(\Gamma)$ a un modèle *si et seulement si* tout ensemble fini d'instances fermées sur la signature Σ des formules de Γ a un modèle propositionnel application de la base de Herbrand B_Σ dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

Rappel : la signature comporte au moins une constante et le signe égal n'est pas utilisé.

Exemple

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$.

Exemple

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$.

$\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $B_\Sigma = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$

Exemple

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$.

$\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $B_\Sigma = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$

$\forall(\Gamma) = \{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg P(a), \neg Q(b)\}$

Exemple

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$.

$\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $B_\Sigma = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$

$\forall(\Gamma) = \{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg P(a), \neg Q(b)\}$

L'ensemble des instances fermées de Γ est

$$\{P(a) \vee Q(a), P(b) \vee Q(b), \neg P(a), \neg Q(b)\}$$

Exemple

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$.

$\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $B_{\Sigma} = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$

$\forall(\Gamma) = \{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg P(a), \neg Q(b)\}$

L'ensemble des instances fermées de Γ est

$$\{P(a) \vee Q(a), P(b) \vee Q(b), \neg P(a), \neg Q(b)\}$$

$v(P(a)) = 0, v(P(b)) = 1, v(Q(a)) = 1, v(Q(b)) = 0$ est un modèle propositionnel application de la base de Herbrand B_{Σ} dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

Exemple

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$.

$\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $B_\Sigma = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$

$\forall(\Gamma) = \{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg P(a), \neg Q(b)\}$

L'ensemble des instances fermées de Γ est

$$\{P(a) \vee Q(a), P(b) \vee Q(b), \neg P(a), \neg Q(b)\}$$

$v(P(a)) = 0, v(P(b)) = 1, v(Q(a)) = 1, v(Q(b)) = 0$ est un modèle propositionnel application de la base de Herbrand B_Σ dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

Donc, $\forall(\Gamma)$ a un modèle. En effet, l'interprétation I de domaine $\{0, 1\}$ définie comme suit est modèle de $\forall(\Gamma)$:

$$a_I = 0, b_I = 1, P_I = \{1\}, Q_I = \{0\}$$

Idées de la preuve (1/2)

⇒ **Supposons que $\forall(\Gamma)$ a un modèle I .**

Les instances des formules de Γ sont conséquences de $\forall(\Gamma)$ donc ont pour modèle I .

Ce modèle I peut être vu comme un modèle propositionnel ν de domaine B_Σ , la base de Herbrand de la signature Σ , où pour tout $A \in B_\Sigma$, $\nu(A) = [A]_I$.

Donc ν est modèle propositionnel de tout ensemble d'instances fermés sur Σ des formules de Γ .

Idées de la preuve (2/2)

⇐ Supposons que tout ensemble fini d'instances fermées sur la signature Σ des formules de Γ a un modèle propositionnel de domaine B_Σ .

D'après le théorème de compacité (théorème 1.2.30), l'ensemble de toutes les instances fermées sur la signature Σ a alors un modèle propositionnel ν de domaine B_Σ .

Ce modèle propositionnel peut être vu comme le modèle de Herbrand de $\forall(\Gamma)$ associé à l'ensemble des éléments de la base de Herbrand dont ν est modèle. D'après le théorème 5.1.16, $\forall(\Gamma)$ a un modèle.

Variante du théorème de Herbrand

Corollaire 5.1.18

Soit Γ un ensemble de formules sans quantificateur de signature Σ .

$\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable *si et seulement s'il existe*
un ensemble fini insatisfaisable d'instances fermées sur la signature Σ
des formules de Γ

Preuve.

Le corollaire est obtenu en remplaçant chaque côté de l'équivalence
du théorème de Herbrand par sa négation. \square

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

- ▶ (1) un ensemble est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

- ▶ (1) un ensemble est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.
- ▶ (2) terminaison sans contradiction (dans ce cas, le domaine de Herbrand ne comprend que des constantes) donc $\forall(\Gamma)$ est satisfaisable, on a un modèle.

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

- ▶ (1) un ensemble est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.
- ▶ (2) terminaison sans contradiction (dans ce cas, le domaine de Herbrand ne comprend que des constantes) donc $\forall(\Gamma)$ est satisfaisable, on a un modèle.
- ▶ (3) on est « fatigué » ! donc on ne peut pas conclure : le corollaire nous dit que si $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable, et si l'on avait été plus courageux, on aurait obtenu une contradiction !

Exemple 5.1.19 (1/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), Q(x), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

Exemple 5.1.19 (1/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), Q(x), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

$$D_{\Sigma} = \{a, b\}. B_{\Sigma} = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

Exemple 5.1.19 (1/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), Q(x), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

$$D_{\Sigma} = \{a, b\}. B_{\Sigma} = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

L'ensemble $\{P(a), Q(b), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Exemple 5.1.19 (2/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

Exemple 5.1.19 (2/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

$$D_{\Sigma} = \{a, b\}. B_{\Sigma} = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

Exemple 5.1.19 (2/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

$$D_\Sigma = \{a, b\}. B_\Sigma = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

L'ensemble de **toutes** les instances sur le domaine de Herbrand $\{P(a) \vee Q(a), P(b) \vee Q(b), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ a un modèle propositionnel caractérisé par $E = \{P(b), Q(a)\}$.

Donc l'interprétation de Herbrand associée à E est modèle de $\forall(\Gamma)$.

Exemple 5.1.19 (2/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, b^{f0}, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

$$D_{\Sigma} = \{a, b\}. B_{\Sigma} = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

L'ensemble de **toutes** les instances sur le domaine de Herbrand $\{P(a) \vee Q(a), P(b) \vee Q(b), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ a un modèle propositionnel caractérisé par $E = \{P(b), Q(a)\}$.

Donc l'interprétation de Herbrand associée à E est modèle de $\forall(\Gamma)$.

À partir de E , nous pouvons fabriquer une interprétation modèle de $\forall(\Gamma)$, c'est-à-dire, un modèle de $\{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg P(a), \neg Q(b)\}$: soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ où $a_I = 0$, $b_I = 1$, $P_I = \{1\}$ et $Q_I = \{0\}$; I est modèle de $\forall(\Gamma)$.

Exemple 5.1.19 (3/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), \neg P(f(x))\}$ et $\Sigma = \{a^{f^0}, f^{f^1}, P^{r^1}\}$.

Exemple 5.1.19 (3/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), \neg P(f(x))\}$ et $\Sigma = \{a^{f^0}, f^{f^1}, P^{r^1}\}$.

$$D_\Sigma = \{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\}. B_\Sigma = \{P(f^n(a)) | n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemple 5.1.19 (3/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), \neg P(f(x))\}$ et $\Sigma = \{a^{f^0}, f^{f^1}, P^{r^1}\}$.

$$D_\Sigma = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}. B_\Sigma = \{P(f^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble $\{P(f(a)), \neg P(f(a))\}$ d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Exemple 5.1.19 (4/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee \neg P(f(x)), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$ et $\Sigma = \{a^{f^0}, f^{f^1}, P^{r^1}\}$.

Exemple 5.1.19 (4/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee \neg P(f(x)), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$ et $\Sigma = \{a^{f^0}, f^{f^1}, P^{r^1}\}$.

$$D_\Sigma = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}. B_\Sigma = \{P(f^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble

$$\{P(a) \vee \neg P(f(a)), P(f(a)) \vee \neg P(f(f(a))), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$$

d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Exemple 5.1.19 (4/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee \neg P(f(x)), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$ et $\Sigma = \{a^{f^0}, f^{f^1}, P^{r^1}\}$.

$$D_\Sigma = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}. B_\Sigma = \{P(f^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble

$$\{P(a) \vee \neg P(f(a)), P(f(a)) \vee \neg P(f(f(a))), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$$

d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Remarque : observez qu'il a fallu prendre 2 instances de la première formule de Γ pour obtenir une contradiction.

Exemple 5.1.19 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, s^{f1}, R^{r2}\}$.

Exemple 5.1.19 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. $B_\Sigma = \{R(s^n(a), s^m(a)) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. D_Σ et B_Σ sont infinis.

Exemple 5.1.19 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. $B_\Sigma = \{R(s^n(a), s^m(a)) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. D_Σ et B_Σ sont infinis.

$\forall(\Gamma)$ a un modèle infini : l'interprétation I de domaine \mathbb{N} avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_I(n) = n + 1$ et $R_I = \{(n, p) \mid n < p\}$, en bref $R(x, y) = x < y$.

Exemple 5.1.19 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. $B_\Sigma = \{R(s^n(a), s^m(a)) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. D_Σ et B_Σ sont infinis.

$\forall(\Gamma)$ a un modèle infini : l'interprétation I de domaine \mathbb{N} avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_I(n) = n + 1$ et $R_I = \{(n, p) \mid n < p\}$, en bref $R(x, y) = x < y$.

$\forall(\Gamma)$ n'a aucun modèle fini, autrement dit il est inutile de chercher des modèles finis avec les méthodes du chapitre précédent.

Exemple 5.1.19 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a^{f0}, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. $B_\Sigma = \{R(s^n(a), s^m(a)) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. D_Σ et B_Σ sont infinis.

$\forall(\Gamma)$ a un modèle infini : l'interprétation I de domaine \mathbb{N} avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_I(n) = n + 1$ et $R_I = \{(n, p) \mid n < p\}$, en bref $R(x, y) = x < y$.

$\forall(\Gamma)$ n'a aucun modèle fini, autrement dit il est inutile de chercher des modèles finis avec les méthodes du chapitre précédent.

Puisque $\forall(\Gamma)$ a un modèle, on est dans une situation où la procédure évoquée précédemment ne pourra jamais donner de réponses, aussi longtemps que l'on poursuive l'énumération des instances des formules de Γ .

Plan

Introduction

Domaine et base de Herbrand

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Aujourd'hui



- ▶ Base, modèle, interprétation et théorème de Herbrand
- ▶ Algorithme semi-décidable
- ▶ Application

Prochaine fois



► Skolémisation

Conclusion

Merci de votre attention.

Questions ?